T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK ve FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARE SİLİNDİR ETRAFINDAN AKAN DAİMÎ SIKIŞTIRILAMAZ İKİ-BOYUTLU AKIŞIN 4. HATA MERTEBESİNDEN YOĞUN FORMÜLASYON İLE NÜMERİK MODELLENMESİ

İLKER İNAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

GEBZE
2014

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK ve FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARE SİLİNDİR ETRAFINDAN AKAN DAİMÎ SIKIŞTIRILAMAZ İKİ-BOYUTLU AKIŞIN 4. HATA MERTEBESİNDEN YOĞUN FORMÜLASYON İLE NÜMERİK MODELLENMESİ

İLKER İNAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
DOÇ. DR. İLYAS KANDEMİR

GEBZE
2014

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ	YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 27.01.2014 tarih ve 2014/06 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 22/05/2014 tarihinde tez savunma sınavı yapılan İlker İNAN'ın tez çalışması Makine Mühendisliği Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. İlyas KANDEMİR

ÜYE : Doç. Dr. Ahmet Zafer ŞENALP

ÜYE : Doç. Dr. Hasan SADIKOĞLU

ONAY

GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ...../..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Bu çalışmada iki-boyutlu, daimî ve sıkıştırılamaz akış problemleri için ifade edilen Navier-Stokes Akış Denklemleri, Akım Fonksiyonu-Vortisite Yaklaşımı ile ifade edilip nümerik yöntemlerden Sonlu Farklar Yöntemi kullanılarak 4. hata mertebesinden hassasiyet ile sonuçlar üreten nümerik formülasyon geliştirilmesi amaçlanmıştır.

Geliştirilen nümerik formülasyonun işlevselliğinin ve uygulanabilirliğinin test edilmesi amacıyla kare kesitli silindir etrafındaki akış problemi test problemi olarak seçilmiştir. Geliştirilen nümerik formülasyonun iterasyon yöntemlerinden Gauss-Seidel Relaxation (Successive Under/Over Relaxation) Yöntemi ile uygulanması sonucu kare geometriye sahip bir küt cisim etrafındaki akış problemi, iki-boyutlu akış alanı içerisinde daimî, sıkıştırılamaz ve sıcaklık değişiminden bağımsız kabul edilerek 4. hata mertebesinden hassasiyet ile nümerik olarak çözülmüştür.

Test problemi aynı zamanda 2. hata mertebesinden hassasiyet ile çözülmüş ve elde edilen nümerik sonuçlar, 4. hata mertebesinden hassasiyet ile elde edilen nümerik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır ve aynı Reynolds Sayısı ve aynı serbest akım hızı değerlerinde 4. hata mertebesinden nümerik sonuçların 2. hata mertebesinden nümerik sonuçlara kıyasla nümerik değerler bakımından daha hassas değerler olduğu gözlemlenmiştir. Aynı zamanda 2. hata mertebesinden iterasyon denklemleri ile çözüm yerine aynı problem parametreleri ve aynı Reynolds Sayısı değerleri için 4. hata mertebesinden iterasyon denklemleri ile çözüm yapıldığında serbest akım hızı değerlerinin değer aralığının genişlediği yani 2. hata mertebesinden iterasyon denklemlerinde reel sonuç üretmeyen serbest akım hızı değerlerinin 4. hata mertebesinden iterasyon denklemleri kullanıldığında reel sonuçlar ürettiği gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Akım Fonksiyonu-Vortisite Formülasyonu, Basamak Akışı, Kare Kesitli Silindir Etrafındaki Akış, Taylor Serisi Açılımı ile Sonlu Farklar Yöntemi, Viskoz Akış.

SUMMARY

In this study, it is aimed to improve numerical formulation with fourth order accuracy for Navier-Stokes Equations, which is expressed for two-dimensional, steady and incompressible flow problems. Navier-Stokes Equations was expressed with Stream Function-Vorticity Approach using Finite Difference Method from numerical methods.

To test the functionality and applicability of the improved numerical formulation, flow problem around cylinder with square cross-section was chosen as a benchmark problem. As a result of applying improved numerical formulation with Gauss-Seidel Relaxation (Successive Under/Over Relaxation) Method, flow problem around a bluff body with square cross-section was solved with fourth order accuracy in two-dimensional flow field, assuming that steady, incompressible and no temperature gradient.

The test problem was also solved with second order accuracy and obtained numerical results were compared with fourth order accuracy numerical results. With the same Reynolds Number and with the same free stream velocity values, fourth order numerical results are more convergent than second order numerical results. Furthermore, with the same problem parameters and Reynolds number instead of solving with second order iteration equation, solving with fourth order iteration equation is seen that free stream velocity values range was enlarged. In other words, free stream velocity values which do not give realistic results with second order iteration equations give realistic results when fourth order iteration equations were used.

Key Words: Stream Function-Vorticity Formulation, Step Flow, Flow Around Square Cylinder, Using The Taylor Series Expansion with The Finite Difference Method, Viscous Flow.

TEŞEKKÜR

Öncelikle, yüksek lisans öğrenimim süresince desteğini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyip pozitif yaklaşımı ve pozitif bakış açısıyla ve çok değerli bilgileriyle bu çalışmanın oluşmasının yolunu açan çok değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. İlyas KANDEMİR'e, bölümümüz hocalarından çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Ahmet Zafer ŞENALP'e, Kimya Mühendisliği Bölümü hocalarından çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Hasan SADIKOĞLU'na ve saygıdeğer bölüm hocalarıma en içten teşekkürlerimi arz ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ	xiii
TABLOLAR DİZİNİ	xv
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Amacı, Katkısı ve İçeriği	2
2. AKIŞKANLAR DİNAMİĞİ TEMEL DENKLEMLERİ VE NÜMERİK ÇÖZÜM YÖNTEMİ	5
2.1. Akışkanlar Dinamiği Temel Denklemleri	5
2.1.1. Kütlenin Korunumu Denklemi (Süreklilik Denklemi)	5
2.1.1.1. Kartezyen Koordinat Sisteminde Kütlenin Korunumu Denklemi	13
2.1.2. Momentumun Korunumu Denklemleri (Navier-Stokes Akış Denklemleri)	15
2.1.2.1. Momentumun Korunumu Denklemlerinin Vektörel Formda İfadesi	15
2.1.2.2. Kartezyen Koordinat Sisteminde Momentumun Korunumu Denklemleri	21
2.1.3. Enerjinin Korunumu Denklemleri	32
2.2. Diferansiyel Akış Analizi ve 4. Hata Mertebesinden Hassasiyet ile Nümerik Çözüm Yöntemi	34
2.2.1. Navier-Stokes Denklem Sisteminin İki-Boyutlu Kartezyen Koordinat Sisteminde İfadesi	34
2.2.2. Navier-Stokes Denklem Sisteminin Akım Fonksiyonu-Vortisite Yaklaşımı ile İki-Boyutlu Kartezyen Koordinat Sisteminde İfadesi	40

2.2.2.1. İki-Boyutlu Kartezyen Koordinat Sisteminde Eliptik Akım Fonksiyonu Denklemi 41
2.2.2.2. İki-Boyutlu Kartezyen Koordinat Sisteminde Eliptik Vortisite Denklemi 43
2.2.3. İki-Boyutlu Kartezyen Koordinat Sisteminde Fiziksel Alandan Hesaplama Alanına Transformasyon 45
2.2.3.1. Transformasyon Fonksiyonları 48
2.2.4. Hesaplama Alanındaki Kartezyen Koordinat Sisteminde (ξ-η Düzleminde) Hız Bileşenleri 49
2.2.4.1. Hesaplama Alanındaki Kartezyen Koordinat Sisteminde (ξ-η Düzleminde) ξ-Ekseni Yönündeki Hız Bileşeni 49
2.2.4.2. Hesaplama Alanındaki Kartezyen Koordinat Sisteminde (ξ-η Düzleminde) η-Ekseni Yönündeki Hız Bileşeni 51
2.2.5. Navier-Stokes Denklem Sisteminin Akım Fonksiyonu-Vortisite Yaklaşımı ile Hesaplama Alanındaki Kartezyen Koordinat Sisteminde (ξ-η Düzleminde) İfadesi 52
2.2.5.1. Akım Fonksiyonu Denkleminin Hesaplama Alanındaki Kartezyen Koordinat Sisteminde (ξ-η Düzleminde) İfadesi 53
2.2.5.2. Vortisite Denkleminin Hesaplama Alanındaki Kartezyen Koordinat Sisteminde (ξ-η Düzleminde) İfadesi 55
2.2.6. Akım Fonksiyonu ve Vortisite Denklemlerinin Ayrıklaştırılmasında Uygulanan Nümerik Çözüm Yöntemi 59
2.2.6.1. Sonlu Farklar Yöntemi 59
2.2.6.2. Taylor Serisi Açılımı ile Sonlu Fark Formülleri 60
2.2.6.2.1. İleri Sonlu Fark Yaklaşımı 62
2.2.6.2.2. Geri Sonlu Fark Yaklaşımı 64
2.2.6.2.3. Merkezî Sonlu Fark Yaklaşımı 66
2.2.6.3. Merkezî Sonlu Fark Yaklaşımı Kullanılarak 4. Hata Mertebesinden Hassasiyet ile Merkezî Sonlu Fark Türev Formülleri 70

2.2.6.3.1. Akım Fonksiyonu ve Vortisitenin Hesaplama Alanındaki Kartezyen Koordinat Sisteminde (ξ-η Düzleminde) 4. Hata Mertebesinden Hassasiyet ile Merkezî Sonlu Fark Türev Formülleri 79
2.2.7. Navier-Stokes Denklem Sisteminin Akım Fonksiyonu-Vortisite Yaklaşımı Kullanılarak 4. Hata Mertebesinden Hassasiyet ile Nümerik Formülasyonu 80
2.2.7.1. Akım Fonksiyonu Denkleminin 4. Hata Mertebesinden Hassasiyet ile Nümerik Formülasyonu 81
2.2.7.2. Vortisite Denkleminin 4. Hata Mertebesinden Hassasiyet ile Nümerik Formülasyonu 87
2.2.8. Navier-Stokes Denklem Sisteminin 4. Hata Mertebesinden Nümerik Çözümünde Uygulanan İteratif Yöntemler 94
2.2.8.1. Gauss-Seidel Yöntemi 95
2.2.8.2. Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi 98
2.2.9. Navier-Stokes Denklem Sisteminin Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi ile İterasyon Denklemlerinin İfadesi 98
2.2.9.1. Akım Fonksiyonunun Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi ile İterasyon Denklemlerinin İfadesi 99
2.2.9.2. Vortisitenin Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi ile İterasyon Denklemlerinin İfadesi 103
2.2.10. Navier-Stokes Denklem Sisteminin 2. Hata Mertebesinden Nümerik Formülasyonu ile 4. Hata Mertebesinden Nümerik Formülasyonunun Karşılaştırılması 111
3. TEST PROBLEMİ UYGULAMASI VE SONUÇLARININ KARŞILAŞTIRILMASI 113
3.1. Kare Kesitli Silindir Etrafından Akan Daimî Sıkıştırılamaz İki-Boyutlu Akış Problemi 113
3.1.1. Kare Kesitli Silindir Etrafındaki Akış Probleminin Tanımı 113
3.1.2. Kare Kesitli Silindir Etrafındaki Akış Probleminde Sınır Şartları 114
3.1.2.1. Kare Kesitli Silindir Yüzeylerindeki Akım Fonksiyonu Değerlerinin Belirlenmesi 118

3.1.2.2. Kare Kesitli Silindir Yüzeylerindeki Vortisite Değerlerinin Thom Yöntemi ile Belirlenmesi 119
3.1.3. Kare Kesitli Silindir Etrafındaki Akış Probleminin Çözümü ve Sonuçları 128
3.1.3.1. Kare Kesitli Silindir Etrafındaki Akış Probleminin Çözümünde Kullanılan Ağ Yapısının Oluşturulması 128
3.1.3.2. Kare Kesitli Silindir Etrafındaki Akış Probleminin Nümerik Çözümünde Kullanılan İterasyon Denklemleri 129
3.1.3.2.1. Kare Kesitli Silindir Etrafındaki Akış Probleminin Nümerik Çözümünde Kullanılan İterasyon Denklemlerinde Yer Alan Sabit Toplamların Analitik Çözümleri 131
3.1.3.3. Kare Kesitli Silindir Etrafındaki Akış Probleminin Nümerik Sonuçları 137
3.1.4. Kare Kesitli Silindir Etrafındaki Akış Probleminin Nümerik Çözümü Sonucu Elde Edilen Grafikler 145
4. SONUÇLAR VE YORUMLAR 155

KAYNAKLAR 157
ÖZGEÇMİŞ 159
EKLER 160

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler ve Kısaltmalar		**Açıklamalar**
a	:	Çizgisel ivme
A_c	:	Kısmî kesit alanı
dx, dy, dz	:	x-, y-, z-eksenleri yönünde sonlu küçük mesafeler
e	:	Toplam enerji
F	:	Kuvvet
g	:	Yerçekimi ivmesi
h	:	Thom Yöntemi'nde kullanılan hayali nokta
i	:	Kartezyen koordinat sisteminde x-eksenini gösteren indis
j	:	Kartezyen koordinat sisteminde y-eksenini gösteren indis
J	:	Jacobian matris
m	:	Kütle
$\dot{m}$	:	Kütlesel debi
N_x	:	x-ekseni yönündeki ağ yapısı nokta sayısı
N_y	:	y-ekseni yönündeki ağ yapısı nokta sayısı
P	:	Termodinamik basınç
Re	:	Reynolds Sayısı
u, v, w	:	x-, y-, z-eksenleri yönündeki hız bileşenleri
U_∞	:	Serbest akım hızı
$\vec{V}$	:	Hız vektörü
V_n	:	Kesit alanına dik yöndeki hız bileşeni
w	:	Relaxation (rölaksasyon) katsayısı
x, y, z	:	Kartezyen koordinat sistemi bileşenleri
θ, r, z	:	Silindirik koordinat sistemi bileşenleri
ψ	:	Akım Fonksiyonu
ω	:	Vortisite (Çevrinti)
ρ	:	Akışkan yoğunluğu
μ	:	Dinamik viskozite
ν	:	Kinematik viskozite

λ	:	Hacimsel viskozite
τ	:	Kayma gerilmesi (viskoz gerilme)
$\tau_{i,j}$	:	Viskoz gerilme tensörü
$\frac{D\ \ldots}{Dt}$	:	Herhangi bir bağımlı değişkenin t bağımsız değişkenine göre maddesel türevi
$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$	:	Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun x bağımsız değişkenine göre $n.$ mertebeden kısmî türevi
∇P	:	Basınç gradyeni
∇	:	Nabla (del) operatörü
∇^2	:	Laplace operatörü (Laplacian)
$curl$	:	Curl operatörü
div	:	Diverjans operatörü
$grad$	:	Gradyen operatörü
ξ	:	Hesaplama alanında x-ekseni karşılığı
η	:	Hesaplama alanında y-ekseni karşılığı
Δt	:	Zaman aralığı
Δx	:	x-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe
Δy	:	y-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe
$\Delta \xi$	:	ξ-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe
$\Delta \eta$	:	η-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe
Δh	:	İki-boyutlu problemlerde her iki yön için ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe
$\vartheta(\Delta x^2)$	:	Hata mertebesi (2. mertebeden)
$\vartheta(\Delta x^4)$	:	Hata mertebesi (4. mertebeden)
KH	:	Kontrol hacmi
RTT	:	Reynolds Transport Teoremi
SOR	:	Successive Over Relaxation

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil No:		**Sayfa**
2.1:	Akış alanı içerisinde alınan dx, dy, dz boyutlarında sonsuz küçük kontrol hacmi.	9
2.2:	Üç-boyutlu akış alanı içerisinde alınan akışkan elemanının zamana bağlı olarak akış alanı içerisindeki konum ve hız değişimi.	17
2.3:	Sonsuz küçük boyutlardaki kontrol hacmi ve bu kontrol hacmine x-ekseni yönünde etkiyen kuvvetler.	22
2.4:	Kontrol hacminin her bir yüzüne etkiyen viskoz gerilme bileşenleri.	28
2.5:	Kısmî yaklaşım ile Navier-Stokes Denklemleri.	31
2.6:	Fiziksel alan (homojen olmayan ağ yapısı) ve hesaplama alanı (homojen ağ yapısı).	45
2.7:	Fiziksel alandan hesaplama alanına transformasyonun grafiksel gösterimi.	46
2.8:	İleri sonlu fark türev formülünün grafiksel gösterimi.	63
2.9:	Geri sonlu fark türev formülünün grafiksel gösterimi.	65
2.10:	Merkezî sonlu fark türev formülünün grafiksel gösterimi.	66
2.11:	İleri, geri ve merkezî sonlu fark türev formüllerinin grafiksel gösterimi.	69
2.12:	Akım Fonksiyonu Denklemi'nin 4. hata mertebesinden hassasiyet ile sonlu fark denkleminde etkin olan noktalar.	86
2.13:	Vortisite Denklemi'nin 4. hata mertebesinden hassasiyet ile sonlu fark denkleminde etkin olan noktalar.	94
3.1:	Kare kesitli silindirin iki-boyutlu akış alanı içerisindeki konumu ve iki-boyutlu akış alanını oluşturan serbest sınırlar.	114
3.2:	Kare kesitli silindir etrafındaki akış probleminde hesaplama alanı ve sınır şartları.	115
3.3:	Kare kesitli silindir yüzeylerindeki hız bileşenleri ve Akım Fonksiyonu değerleri.	118
3.4:	Kare kesitli silindirin sol yüzeyindeki Vortisite değerlerinin belirlenmesinde kullanılan noktalar.	120

3.5: Kare kesitli silindirin sağ yüzeyindeki Vortisite değerlerinin belirlenmesinde kullanılan noktalar. 122
3.6: Kare kesitli silindirin alt yüzeyindeki Vortisite değerlerinin belirlenmesinde kullanılan noktalar. 124
3.7: Kare kesitli silindirin üst yüzeyindeki Vortisite değerlerinin belirlenmesinde kullanılan noktalar. 126
3.8: Kare kesitli silindir sınırlarında Akım Fonksiyonu değerleri ile Vortisite değerlerini veren denklemler. 128
3.9: Kare kesitli silindir etrafındaki akış probleminin çözümünde kullanılan 341x81 boyutundaki homojen ağ yapısı. 129
3.10: Kare kesitli silindir etrafındaki akış probleminde $Re = 40$ ve $Re = 300$ değerleri için Akım Fonksiyonu kontur grafiklerinin karşılaştırılması. 147
3.11: Kare kesitli silindir etrafındaki akış probleminde $Re = 300$ ve $Re = 22000$ değerleri için Akım Fonksiyonu kontur grafiklerinin karşılaştırılması. 148

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo No:		**Sayfa**
2.1:	Akış probleminin fiziksel özelliklerine göre Navier-Stokes Denklem Sistemi'nde göz önüne alınan matematiksel nicelikler.	32
2.2:	Kartezyen koordinat sisteminde 4. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri, $\vartheta(\Delta x^4, \Delta y^4)$.	77
3.1:	Serbest akım alanında dikkate alınan sınır şartları.	115
3.2:	Kare kesitli silindirin köşe noktalarının 341x81 boyutlu ağ yapısındaki koordinatları.	119
3.3:	Reynolds Sayısı ve serbest akım hızının farklı değerlerinde elde edilen Akım Fonksiyonu ve Vortisite'nin 4. hata mertebesinden nümerik değerleri.	139
3.4:	Reynolds Sayısı ve serbest akım hızının farklı değerlerinde elde edilen Akım Fonksiyonu ve Vortisite'nin 2. hata mertebesinden nümerik değerleri.	142
3.5:	Reynolds Sayısı ve serbest akım hızının farklı değerlerinde 4. hata mertebesinden nümerik formülasyon sonucu elde edilen Akım Fonksiyonu (akım çizgileri) kontur grafikleri.	149
3.6:	Reynolds Sayısı ve serbest akım hızının farklı değerlerinde 2. hata mertebesinden nümerik formülasyon sonucu elde edilen Akım Fonksiyonu (akım çizgileri) kontur grafikleri.	152

1. GİRİŞ

Akışkanlar Dinamiği, Isı ve Kütle Transferi, Termodinamik, Hidromekanik vb. bilim dallarında ifade edilen problemlerin matematiksel modellerinde genellikle doğrusal olmayan kısmî türevli diferansiyel denklemlerle karşılaşılır ve bu denklemler doğrusal olmadıklarından dolayı analitik çözümleri mevcut değildir. Dolayısıyla doğrusal olmayan kısmî türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde nümerik yöntemlere başvurulur ve nümerik çözüm sonucu çıkan değerler belli bir hata payı içerir. Sonlu Farklar Yöntemi, Sonlu Elemanlar Yöntemi, Sonlu Hacimler Yöntemi ve Sınır Elemanlar Yöntemi analitik çözümü mevcut olmayan akış problemlerinin çözümünde kullanılan temel nümerik yöntemlerdir ve bu yöntemlerin her birinin belli başlı avantaj ve dezavantajları mevcuttur. Bu nümerik yöntemlerden hangisinin daha pratik olduğu ve daha iyi sonuç verdiği göz önüne alınan akış probleminin fiziksel özelliklerine göre değişkenlik gösterir. Nümerik olarak çözülmesi gereken problemde yuvarlatma hatası, kesme hatası, giriş verisindeki hata veya insan hatasından kaynaklanan hataların hesaplama işlemi süresince artmaması başka bir ifadeyle; uygulanan yöntemin kararlı olması, çözüm sonucu elde edilen değerlerin analitik çözüm sonucu elde edilen değerlere yakın olması başka bir ifadeyle; yakınsama şartının sağlanması ve yakınsama hızının yüksek olması ve buna bağlı olarak hesaplama işlemi süresinin kısalması gibi faktörler hangi nümerik çözüm yönteminin daha elverişli ve işlevsel olduğu konusunda belirleyici faktörlerdendir.

Akışkanlar Dinamiği literatüründe iki-boyutlu, daimî ve sıkıştırılamaz akış problemleri için ifade edilen Navier-Stokes Akış Denklemleri'nin çözümünde Sonlu Elemanlar, Sonlu Hacimler ve Sınır Elemanlar Yöntemleri, vb. yöntemler kullanılarak yapılan çalışmalar mevcuttur. Bu çalışmada ise literatürde yapılmış diğer çalışmalardan farklı olarak nümerik yöntemlerden Sonlu Farklar Yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemde kullanılan merkezî sonlu fark, ileri sonlu fark ve geri sonlu fark yaklaşımlarından merkezî sonlu fark yaklaşımı kullanılarak Navier-Stokes Denklem Sistemi'ndeki kısmî türevli diferansiyel denklemler ayrıklaştırılmıştır. Kullanılan nümerik yöntemde Taylor Serisi Açılımı sonucu elde edilen 4. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri kullanılarak 4. hata mertebesinden hassasiyet ile sonuçlar üreten nümerik formülasyon geliştirilmiştir.

Yöntemde 4. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri kullanlıdığından ötürü $f_{i+2,j}$, $f_{i+1,j}$, $f_{i,j}$, $f_{i-1,j}$, $f_{i-2,j}$, $f_{i,j+2}$, $f_{i,j+1}$, $f_{i,j-1}$ ve $f_{i,j-2}$ olmak üzere toplam 9 farklı nokta kullanılmıştır.

Bu çalışmada dikkate alınan Navier-Stokes Akış Denklemleri'nin nümerik çözümünde, öncelikle çözüm alanı için oluşturulan ağ yapısı, noktalar şeklinde temsil edilmiştir ve çözüm alanındaki her iki nokta arasında belli bir aralık mevcuttur. Çözüm alanı için noktalardan oluşan ağ yapısı oluşturulduktan sonra Navier-Stokes denklem sistemindeki her bir denklemin ayrıklaştırılması (diskretize edilmesi) amacıyla kısmî türev ifadeleri, Taylor Serisi Açılımı sonucu elde edilen 4. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri kullanılarak ifade edilir. Böylece doğrusal olmayan denklem sistemindeki her bir denklem Sonlu Fark Denklemine dönüştürülür. Ağ yapısı içerisindeki her bir noktadaki hız ve basınç değerlerini veren genel bir formülasyon elde etmek amacıyla elde edilen Sonlu Fark Denklemleri, iteratif yöntemlerden Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi (Successive Under/Over Relaxation Yöntemi) kullanılarak 4. hata mertebesinden hassasiyet ile nümerik sonuçlar üreten iterasyon denklemlerine dönüştürülmüştür. İteratif yöntemlerden Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi'nin Richardson, Jacobi, Gauss-Seidel vb. iteratif yöntemlere kıyasla yakınsama hızının daha iyi olması ve buna bağlı olarak herhangi bir programlama dilinde yazılacak programların hesaplama zamanının kısalmasından ötürü bu çalışmada iteratif yöntem olarak Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi kullanılmıştır.

Elde edilen nümerik formülasyonun işlevselliğinin ve uygulanabilirliğinin test edilmesi amacı ile Akışkanlar Dinamiği literatüründe sıklıkla karşılaşılan ve çözümü uluslararası çalışmalarda kabul edilmiş kare kesitli silindir etrafındaki daimî, sıkıştırılamaz ve iki-boyutlu akış problemi geliştirilen nümerik formülasyon ile çözülmüştür.

1.1. Tezin Amacı, Katkısı ve İçeriği

Bu çalışmada iki-boyutlu, daimî ve sıkıştırılamaz akış problemleri için ifade edilen doğrusal olmayan kısmî türevli diferansiyel denklem sistemi olan Navier-Stokes Akış Denklemleri'ni 4. hata mertebesinden hassasiyet ile çözen nümerik formülasyon geliştirilmesi amaçlanmıştır. Geliştirilen nümerik formülasyonun

Akışkanlar Dinamiği literatüründe karşılaşılan akış problemlerine uygulanabilirliğinin test edilmesi amacıyla üçüncü bölümde ifade edilen akış problemi, geliştirilen nümerik formülasyon yardımıyla 4. hata mertebesinden hassasiyetle çözülmüştür. Göz önüne alınan akış problemi, aynı zamanda 2. hata mertebesinden hassasiyetle de çözülmüştür. Çözüm sonucu elde edilen 4. hata mertebesinden hassasiyette olan değerler, 2. hata mertebesinden hassasiyette olan değerler ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucu beklendiği üzere 4. hata mertebesinden hassasiyetteki nümerik değerlerin 2. hata mertebesinden hasassiyetteki nümerik değerlere kıyasla daha hassas değerler olduğu tespit edilmiştir.

Bu çalışma kapsamında, ikinci bölümde Akışkanlar Dinamiği, Isı ve Kütle Transferi, Termodinamik, Hidromekanik vb. bilim dallarında karşılaşılan problemlerin analitik veya nümerik çözümlerinde sıklıkla kullanılan temel korunum denklemleri olan Kütlenin Korunumu Denklemi (Süreklilik Denklemi) ve Momentumun Korunumu Denklemi ifade edilmiştir. İlerleyen alt bölümlerde Kütlenin ve Momentumun Korunumu Denklemleri'nden türetilen doğrusal olmayan kısmî türevli diferansiyel denklemler olan Navier-Stokes Akış Denklemleri, Akım Fonksiyonu-Vortisite (ψ-ω) yaklaşımı ile iki-boyutlu kartezyen koordinat sisteminde ifade edilmiştir. İlerleyen alt bölümlerde dikkate alınan transformasyon fonksiyonları ile fiziksel alanda iki-boyutlu kartezyen koordinat sisteminde ifade edilen Eliptik Akım Fonksiyonu ve Vortisite Denklemleri hesaplama alanında iki-boyutlu kartezyen koordinat sisteminde ifade edilmiştir ve hesaplama alanında ifade edilen Eliptik Akım Fonksiyonu ve Vortisite Denklemleri, nümerik yöntemlerden Sonlu Farklar Yöntemi'nde kullanılan Taylor Serisi Açılımı ile 4. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri kullanılarak ayrıklaştırılmıştır (diskretize edilmiştir). Böylece Eliptik Akım Fonksiyonu ve Vortisite Denklemleri'nin, Taylor Serisi Açılımı ile 4. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark formülleri kullanılarak Sonlu Fark Denklemleri elde edilmiştir. Elde edlen Sonlu Fark Denklem Sistemi'nin çözümü için İteratif Yöntemler'den Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi, başka bir ifadeyle; Successive Under/Over Relaxation Yöntemi kullanılarak Akım Fonksiyonu ve Vortisite'nin 4. hata mertebesinden hassasiyet ile sonuçlar üreten iteratif çözüm denklemleri elde edilmiştir. 4. hata mertebesinden hassasiyet ile sonuçlar üreten nümerik formülasyonun elde edilmesiyle ikinci bölüm sonlanmıştır.

Üçüncü bölümde, ikinci bölümde elde edilen nümerik formülasyonun işlevselliğinin ve uygulanabilirliğinin test edilmesi amacıyla kare kesitli silindir etrafındaki daimî, sıkıştırılamaz ve iki-boyutlu akış problemi, test problemi olarak seçilmiştir. Test problemi, hem 4. hata mertebesinden nümerik formülasyon kullanılarak 4. hata mertebesinden hassasiyetle hem de 2. hata mertebesinden nümerik formülasyon kullanılarak 2. hata mertebesinden hassasiyetle çözülmüştür. Elde edilen 4. hata mertebesinden hassasiyetteki nümerik değerler, 2. hata mertebesinden hassasiyetteki nümerik değerler ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucu, 4. hata mertebesinden nümerik değerlerin 2. hata mertebesinden nümerik değerlere kıyasla nümerik değerler bakımından daha hassas değerler olduğu gözlemlenmiştir. Test problemi, 2. hata mertebesinden iterasyon denklemleri yerine aynı problem parametreleri ve aynı Reynolds Sayısı değerleri için 4. hata mertebesinden iterasyon denklemleri ile çözüldüğünde serbest akım hızı değerlerinin değer aralığının genişlediği yani 2. hata mertebesinden iterasyon denklemlerinde reel sonuç üretmeyen serbest akım hızı değerlerinin 4. hata mertebesinden iterasyon denklemleri kullanıldığında reel sonuçlar ürettiği gözlemlenmiştir. Literatürde yapılan diğer çalışmalarda elde edilen Akım Fonksiyonu (akım çizgileri) kontur grafikleri Reynolds Sayısı'nın 40, 300 ve 22000 değerleri için karşılaştırılmış ve aynı zamanda mevcut çalışmada Reynolds Sayısı'nın 300 ve serbest akım hızının $1\,m/s$ değerleri için 4. hata mertebesinden nümerik çözüm sonucu çizilen Akım Fonksiyonu (akım çizgileri) kontur grafikleri ile 2. hata mertebesinden nümerik çözüm sonucu çizilen Akım Fonksiyonu (akım çizgileri) kontur grafikleri birbiri içerisinde karşılaştırılarak üçüncü bölüm sonlanmıştır.

Dördüncü ve son bölümde ise bu çalışma kapsamında geliştirilen nümerik formülasyonun diğer yöntemlere kıyasla genel değerlendirmesi yapılmış ve genel sonuç olarak üçüncü bölümde ifade edilen test problemi, 2. hata mertebesinden iterasyon denklemleri ile çözüm yerine aynı problem parametreleri ve aynı Reynolds Sayısı değerleri için 4. hata mertebesinden iterasyon denklemleri ile çözüldüğünde çözümde kullanılan serbest akım hızı değerlerinin değer aralığının genişlediği yani 2. hata mertebesinden iterasyon denklemlerinde reel sonuç üretmeyen serbest akım hızı değerlerinin 4. hata mertebesinden iterasyon denklemleri kullanıldığında reel sonuçlar ürettiği sonucu elde edilmiştir. Geliştirilen nümerik formülasyonun kartezyen koordinat sisteminde tanımlanabilen farklı geometrilerdeki akış problemlerine uygulanabilirliği değerlendirilerek dördüncü bölüm sonlanmıştır.

2. AKIŞKANLAR DİNAMİĞİ TEMEL DENKLEMLERİ VE NÜMERİK ÇÖZÜM YÖNTEMİ

2.1. Akışkanlar Dinamiği Temel Denklemleri

Klasik ve modern fiziğin alt bilim dallarından olan Akışkanlar Dinamiği, Isı ve Kütle Transferi, Termodinamik, Hidromekanik vb. bilim dallarında temel kavramlardan korunum yasaları öncelikli olarak yer alan konulardandır. Bu bölümde temel korunum yasalarından olan Kütlenin Korunumu ve Momentumun Korunumu Yasaları'ndan söz edilip bu yasalara ilişkin Temel Korunum Denklemleri ifade edilmiştir.

2.1.1. Kütlenin Korunumu Denklemi (Süreklilik Denklemi)

Kütle, uzaydaki herhangi bir boşlukta yer kaplayan herhangi bir geometrik şekle sahip katı, sıvı, gaz veya plazma fazlarından herhangi birindeki maddeye ait fiziksel bir büyüklüktür. Aynı zamanda zaman ve konumdan bağımsız olarak maddenin her hâli için değişmez; başka bir ifadeyle korunan fiziksel bir büyüklüktür. Kütle, herhangi bir kimyasal ya da fiziksel proses sonucunda momentum ve enerji gibi değişmeden kalan başka bir ifadeyle; korunan bir fiziksel büyüklük olup bu fiziksel büyüklüğün korunumu klasik ve modern fizikte "Kütlenin Korunumu İlkesi" olarak tanımlanır [Çengel ve Cimbala, 2007]. Kütlenin Korunumu İlkesi, doğada gerçekleşen her bir proses için geçerli olup diğer korunum ilkeleri olan Momentumun Korunumu İlkesi ve Enerijinin Korunumu İlkesi gibi literatürde yer alan en temel ilkelerdendir. Akışkanlar Dinamiği, Isı ve Kütle Transferi, Termodinamik, Hidromekanik vb. bilim dallarındaki birçok proses başka bir ifadeyle; birçok uygulama Kütlenin Korunumu İlkesi'ne göre gerçekleşir. Örneğin; su ve hava soğutmalı herhangi bir otomobildeki radyatörün kanallarına giren belli bir kütlesel debideki su soğuyarak yine aynı kütlesel debide çıkar ve radyatörün çıkış kanalından sisteme soğutma amaçlı verilir.

Herhangi bir proses, kapalı veya açık sistem olmak üzere iki farklı sistem içerisinde gerçekleşebilir ve Kütlenin Korunumu Denklemi'nin genel ifadesinin eldesi için öncelikle dikkate alınan prosesin hangi sistem içerisinde gerçekleştiğini tanımlamak gerekir. Öncelikle sistem, üzerinde çalışmak üzere seçilen bir miktar madde ya da uzaydaki bir bölge olarak tanımlanır. Sistem dışında kalan kütle ya da bölge ise çevre olarak tanımlanır. Sistemin sınırları sabit ya da hareketli olabilir. Sistem sınırı başka bir ifadeyle; sınır tabaka, sistem ile çevre arasındaki ortak temas yüzeyidir ve matematiksel olarak sınır tabakanın kalınlığı yoktur, dolayısıyla sınır tabakanın kütlesi ve hacmi yoktur [Çengel ve Cimbala, 2007].

Kapalı sistem (literatürde sadece sistem ya da kontrol kütlesi olarak da bilinir), sabit bir kütleden oluşur ve sınır tabakadan kütle geçemez; ama enerji, ısı ya da iş formunda sınır tabakadan geçebilir ve kapalı sistemin hacminin bu durum için sabit olması gerekmez. Dikkate alınan kapalı sistemin sınır tabakasından enerji transferi gerçekleşmiyorsa; bu kapalı sistem, yalıtılmış (izole) sistem olarak tanımlanır [Çengel ve Cimbala, 2007].

Açık sistem (literatürde kontrol (denetim) hacmi olarak da bilinir), uzayda uygun bir biçimde seçilmiş bir bölgedir. Bu tür sistemlerde (kapalı sistemlerin tersine) sınır tabakadan hem enerji hem de kütle transferi gerçekleşebilir. Örneğin; ısı değiştiricisi (eşanjörü), evaporatör (buharlaştırıcı), kondenser (yoğuşturucu), otomobil radyatörü, türbin, lüle (difüzör), kompresör, vb. mekanik iş makinelerinde sınır tabakadan sürekli olarak kütle akışı mevcuttur, dolayısıyla bu sistemler kapalı sistem (kontrol kütlesi) yerine açık sistem (kontrol (denetim) hacmi) olarak modellenir [Çengel ve Cimbala, 2007].

Zamanla değişen belirli bir sabit kütle başka bir ifadeyle; kapalı bir sistem için kütlenin korunumu bağıntısı, proses süresince sistemin kütlesinin sabit kalacağını net bir şekilde gösteren $m_{sistem} = sabit$ ya da $\frac{dm_{sistem}}{dt} = 0$ şeklindeki ifade ile belirtilir [Çengel ve Cimbala, 2007].

Herhangi bir kontrol hacmi için Kütlenin Korunumu İlkesi, Δt zaman aralığında kontrol hacmine giren ya da kontrol hacminden çıkan net kütle geçişi, Δt süresinde kontrol hacmi içerisindeki net kütle değişimine (artışa veya azalmaya) eşittir. Buna göre;

$$\begin{pmatrix}\Delta t\ zaman\ aralığında\\ kontrol\ hacmine\\ giren\ toplam\ kütle\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\Delta t\ zaman\ aralığında\\ kontrol\ hacminden\\ çıkan\ toplam\ kütle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta t\ zaman\ aralığında\\ kontrol\ hacmi\ içindeki\\ net\ kütle\ değişimi\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

veya

$$m_{giren}-m_{çıkan}=\Delta m_{Kontrol\ Hacmi} \tag{2.2}$$

şeklinde ifade edilir [Çengel ve Cimbala, 2007].

(2.2) no.'lu denklemde $\Delta m_{Kontrol\ Hacmi}=m_{son}-m_{ilk}$ proses esnasında kontrol hacminde meydana gelen kütle değişimidir. (2.2) no.'lu denklem, birim zamandaki geçişler ve değişim cinsinden;

$$\dot{m}_{giren}-\dot{m}_{çıkan}=\frac{dm_{Kontrol\ Hacmi}}{dt} \tag{2.3}$$

şeklinde de ifade edilir. (2.3) no.'lu denklemde $\dot{m}_{giren}$ ve $\dot{m}_{çıkan}$ sırasıyla, kontrol hacmine giren ve çıkan toplam kütlesel debilerdir ve $\frac{dm_{KH}}{dt}$ ise kontrol hacmi sınırları içerisindeki kütle miktarının değişim hızıdır. (2.3) no.'lu denklemde geçen kütlesel debi, herhangi bir en-kesit alanında birim zamanda akan kütle miktarı olarak tanımlanır. Herhangi bir fiziksel büyüklük üzerindeki nokta işareti ise fiziksel büyüklükteki değişimin zamana bağlı olarak gerçekleştiğini ifade etmek için kullanılır ve fiziksel büyüklüğün birim zamandaki değişmini ifade eder [Çengel ve Cimbala, 2007].

Kütlesel debi matematiksel olarak akışkanın yoğunluğu, herhangi bir geometrik şeklin kesit alanı ve bu kesit alanına dik yöndeki hız bileşeninin çarpımına eşittir. Buna göre kütlesel debi;

$$\dot{m}=\rho V_n A_c \tag{2.4}$$

olarak ifade edilir.

(2.2) ve (2.3) no.'lu denklemler, herhangi bir kontrol hacmi için kütle dengesi başka bir ifadeyle; Kütlenin Korunumu Denklemleri'dir. Diferansiyel bir kontrol hacmi için yazılan Kütlenin Korunumu Denklemi, literatürde Süreklilik Denklemi olarak da adlandırılır.

Bir proses esnasında sistemin kütlesinin sabit kalması gerektiğinden, kapalı sistemlerde Kütlenin Korunumu İlkesi tam olarak uygulanır. Bununla birlikte kontrol yüzeyi olarak adlandırılan kontrol hacmi sınırlarından içeri veya dışarı kütle geçişi olabilir. Bunun yanında kontrol hacmi bir proses esnasında hareket edebilir ya da şekil değiştirebilir; ancak gerçek mühendislik uygulamalarının çoğunda sabit, şekli değişmeyen türden kontrol hacimleri söz konusudur. Örneğin; ısı değiştiricisi (eşanjörü), evaporatör (buharlaştırıcı), kondenser (yoğuşturucu), otomobil radyatörü, türbin, lüle (difüzör), kompresör, vb. mekanik iş makinaları, sabit, şekli değişmeyen türden kontrol hacimleri olarak modellenir [Çengel ve Cimbala, 2007].

Bir yaygın özelliğin bir kontrol kütlesi (kapalı sistem) ve bir kontrol hacmi (açık sistem) için birim zamandaki değişimleri arasındaki ilişki Reynolds Transport (Aktarım) Teoremi (RTT) (İntegral Analizi) ile ifade edilir. RTT, kontrol kütlesi ile kontrol hacmi yaklaşımları arasında bir bağ kurar. Reynolds Transport Teoremi'nin (RTT'nin) uygulanmasıyla kontrol hacmi için kütlenin korunumuna ait genel ifade aşağıdaki şekilde elde edilir [Çengel ve Cimbala, 2007];

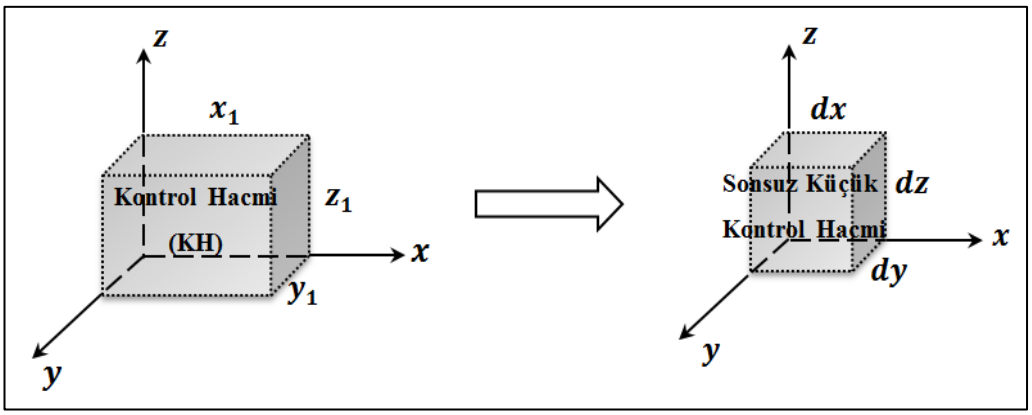
$$0 = \left(\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \right)_{Kontrol\ Hacmi} + \left(\int \rho \vec{V} . \vec{n} dA \right)_{Kontrol\ Yüzeyi} \qquad (2.5)$$

(2.5) no.'lu denklem, kontrol hacmi içerisindeki kütlenin zamana bağlı değişim hızı ile kontrol yüzeyinden olan net kütle transferinin toplamının 0'a eşit olduğunu ifade eder. (2.5) no.'lu denklem, hız vektörü mutlak hız olmak koşuluyla (sabit bir gözlemciye göre) hem sabit hem de hareket hâlindeki kontrol hacimleri için geçerlidir. Başka bir ifadeyle; hareket hâlindeki akış alanının analizinde kullanılan iki farklı yaklaşım olan hem Eulerian Yaklaşımı hem de Lagrangian Yaklaşımı'nı dikkate alarak her iki yaklaşım için de geçerlidir [Çengel ve Cimbala, 2007]. İyi tanımlanmış giriş ve çıkışlar söz konusu olduğunda (2.5) no.'lu denklem;

$$\left(\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV\right)_{Kontrol\ Hacmi} = \sum_{giren} \dot{m} - \sum_{çıkan} \dot{m} \qquad (2.6)$$

olarak da ifade edilir [Çengel ve Cimbala, 2007]. (2.6) no.'lu denklem, kontrol hacmi içerisindeki kütlenin birim zamandaki net değişim hızının kontrol hacmine giren ve kontrol hacminden çıkan kütlesel debilerin farkına eşit olduğunu ifade eder ve bu denklem herhangi bir geometrik şekle sahip kontrol hacmine uygulanabilir [Çengel ve Cimbala, 2007].

Kütlenin korunumu için bir diferansiyel denklem oluşturmak üzere kontrol hacminin dx, dy ve dz boyutlarında sonsuz küçük bir kontrol hacmine küçüldüğünü düşünelim. Limit durumunda kontrol hacminin tamamı akış alanındaki bir noktaya indirgenecektir [Çengel ve Cimbala, 2007]. Akış alanı içerisinde göz önüne alınan kontrol hacminin dx, dy ve dz boyutlarında sonsuz küçük bir kontrol hacmine küçülmesi durumuda elde edilen kontrol hacmi Şekil 2.1'de gösterilmiştir.



Şekil 2.1: Akış alanı içerisinde alınan dx, dy, dz boyutlarında sonsuz küçük kontrol hacmi.

Kütlenin korunumu ifadesinin diferansiyel formunun eldesi için Diverjans Teoremi başka bir ifadeyle; Gauss Teoremi veya sonsuz küçük kontrol hacmi kullanılarak Taylor Seri Açılımı Yöntemi olmak üzere iki farklı yöntem uygulanır [Çengel ve Cimbala, 2007].

Sonsuz küçük boyutlarda kontrol hacmi dikkate alınarak bu kontrol hacmi üzerindeki orijin noktasından uzakta herhangi bir A noktası için kontrol hacminin ön, arka, üst, alt, sağ ve sol yan yüzeyler olmak üzere altı farklı yüzeyi olduğundan her bir yüzey için Taylor Serisi Açılımı uygulanarak kontrol hacmine giren ve kontrol

hacminden çıkan kütlesel debiler hesaplanır ve sonuç olarak kartezyen koordinat sisteminde kütlenin korunumuna ait genel diferansiyel denklem elde edilir; ancak bu yöntemin uygulanabilirliği kompleks geometriler için pratik olmadığından kütlenin korunumuna ait diferansiyel denklemin elde edilmesi amacıyla pratik ve tüm geometrilere uygulanabilme özelliklerinden ötürü literatürde Diverjans Teoremi başka bir ifadeyle; Gauss Teoremi daha çok kullanılır. Dolayısıyla bu çalışmada (2.6) no.'lu denkleme Diverjans Teoremi başka bir ifadeyle; Gauss Teoremi uygulanarak kütlenin korunumuna ait diferansiyel denklem elde edilmeye çalışılacaktır.

Diverjans Teoremi, Alman matematikçi Johann Carl Friedrich Gauss'un (1777-1855) adına atfen Gauss Teoremi olarak da adlandırılır. Diverjans Teoremi, bir vektörün diverjansının hacim integralini, bu hacmi tanımlayan yüzey boyunca bir alan integraline dönüştürmemize olanak verir. Herhangi bir $\vec{G}$ vektörü için $\vec{G}$'nin diverjansı, $\vec{\nabla}.\vec{G}$ şeklinde tanımlanır ve Diverjans Teoremi;

$$\int \vec{\nabla}.\vec{G}\, dV = \oint \vec{G}.\vec{n} dA \tag{2.7}$$

olarak ifade edilir [Çengel ve Cimbala, 2007]. (2.7) no.'lu denklemde alan integrali üzerindeki daire, integralin V hacmini çevreleyen tüm kapalı A alanı etrafında alınması gerektiğini vurgulamak üzere kullanılmıştır. Yukarıda ifade edilen (2.5) no.'lu denklemde kontrol yüzeyi için yazılan terimde, integral sembolü üzerine daire konulmasa bile buradaki kontrol yüzeyi kapalı bir alanı ifade etmektedir [Çengel ve Cimbala, 2007]. (2.7) no.'lu denklem, (2.6) no.'lu denklemde olduğu gibi herhangi bir geometrik şekle sahip kontrol hacmine uygulanabilir.

Kütlenin korunumunun genel ifadesini elde etmek amacıyla (2.5) no.'lu denklemi ifade ederken kullanılan kontrol hacmini göz önüne alalım. $\vec{G}$, herhangi bir vektör olabileceği için $\vec{G} = \rho\vec{V}$ alınır. (2.7) no.'lu denklemin (2.5) no.'lu denklemde yerine yazılması ile alan integrali bir hacim integraline dönüşür;

$$0 = \left(\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int \vec{\nabla}.(\rho\vec{V}) dV \right)_{Kontrol\ Hacmi} \tag{2.8}$$

Her iki hacim integrali aynı integral sembolü altında toplanacak olursa;

$$\left(\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left(\rho \vec{V}\right)\right] dV\right)_{Kontrol\ Hacmi} = 0 \qquad (2.9)$$

ifadesi elde edilir.

(2.9) no.'lu denklem, (2.6) ve (2.7) no.'lu denklemlerde olduğu gibi herhangi bir geometrik şekle sahip kontrol hacmine uygulanabilir; ancak bu durumun geçerli olabilmesi, yani herhangi bir geometrik şekle sahip kontrol hacmine uygulanabilmesi için (2.9) no.'lu denklemin sol tarafında yer alan köşeli parantez içindeki terimin 0'a eşit olması gerekir. Son olarak kütlenin korunumu için genel bir diferansiyel denklem olan, literatürde daha çok bilinen adıyla Süreklilik Denklemi elde edilmiş olur. Süreklilik Denklemi (Kütlenin Korunumu Denklemi);

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left(\rho \vec{V}\right) = 0 \qquad (2.10)$$

olarak ifade edilir [Çengel ve Cimbala, 2007]. (2.10) no.'lu denklem, Süreklilik Denklemi'nin sıkıştırılabilir ve daimî başka bir ifadeyle; zamana bağlı olarak herhangi bir fiziksel değişimin olmadığı akış türü için de geçerli bir formudur ve akış alanındaki her noktada geçerlidir [Çengel ve Cimbala, 2007]. Süreklilik Denklemi'nin alternatif formunu elde etmek amacıyla diverjans terimine çarpım kuralını uygulayarak (2.10) no.'lu denklemin uzun formu yazılırsa;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left(\rho \vec{V}\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V}.\vec{\nabla}\rho + \rho \vec{\nabla}.\vec{V} = 0 \qquad (2.11)$$

olarak elde edilir. (2.11) no.'lu denklemin sağ tarafındaki ilk iki terimin toplamı, ρ'nun maddesel türevini başka bir ifadeyle; materyal türevini ifade etmektedir. Literatürde herhangi bir fiziksel büyüklüğün maddesel türevi başka bir ifadeyle; materyal türevi;

$$\frac{D(\dots)}{Dt} = \frac{\partial(\dots)}{\partial t} + \vec{V}.\nabla(\dots) \qquad (2.12)$$

olarak ifade edilir [Biringen and Chow, 2011]. Buna göre; (2.11) no.'lu denklemde ρ'nun maddesel türevi yazılır ve denklemdeki her bir terim ρ çarpanına bölünürse;

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \vec{\nabla}.\vec{V} = 0 \tag{2.13}$$

olarak Süreklilik Denklemi'nin alternatif formu elde edilir. (2.13) no.'lu denklem, akış alanı boyunca bir akışkan elemanını izlerken (buna maddesel eleman veya akışkan parçacığı da denir), $\vec{\nabla}.\vec{V}$ değeri değiştiğinde bu akışkan elemanının (parçacığının) yoğunluğunun değiştiğini göstermektedir. Şayet, akışkan elemanı hareket ettikçe maddesel elemanın yoğunluğundaki değişimler, $\vec{\nabla}.\vec{V}$'deki hız gradyenleri yanında ihmal edilebilecek kadar küçük kalıyorsa, bu durumda akış sıkıştırılamaz olarak düşünülür ve sıkıştırılamazlık kabulünden ötürü yoğunluğun herhangi bir bağımsız veya bağımlı değişkene göre değişimi 0'dır. Bunun sonucunda $\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} \cong 0$'dır. Dolayısıyla son olarak daimî başka bir ifadeyle; zamana bağlı olarak herhangi bir fiziksel değişimin olmadığı ve sıkıştırılamaz başka bir ifadeyle; yoğunluğun herhangi bir bağımsız veya bağımlı değişkene göre değişmediği akış türü için Süreklilik Denklemi;

$$div\,\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = 0 \tag{2.14}$$

olarak elde edilir [Çengel ve Cimbala, 2007]. (2.14) no.'lu denklemde yer alan div ifadesi, herhangi bir fiziksel büyüklüğün diverjansını ifade etmektedir. Diverjans, hacim 0'a giderken $\vec{F}(x,y,z)$ ile gösterilen herhangi bir vektör alanının birim hacme düşen akısı olarak tanımlanır ve herhangi bir fiziksel büyüklüğün diverjansı;

$$div\vec{F} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint \vec{F}\, d\vec{A}}{\Delta v} \tag{2.15}$$

olarak tanımlanır [Çengel ve Cimbala, 2007]. (2.15) no.'lu denklemde yer alan $d\vec{A}$ terimi, hacmi çevreleyen kapalı yüzey alanını ifade etmektedir. Diverjans Teoremi yardımı ile herhangi bir fiziksel büyüklüğün diverjansının, nabla operatörü (∇) ile fiziksel büyüklüğün vektörel ifadesinin skaler çarpımına eşit olduğu belirlenebilir [Çengel ve Cimbala, 2007].

Literatürde herhangi bir fiziksel büyüklüğün kartezyen koordinat sisteminde diverjansı;

$$div(\dots) = \vec{\nabla}.(\dots) = \frac{\partial(\dots)}{\partial x} + \frac{\partial(\dots)}{\partial y} + \frac{\partial(\dots)}{\partial z} \tag{2.16}$$

olarak ifade edilir [Lomax et al., 2001]. (2.16) no.'lu denklem dikkate alınarak, herhangi bir fiziksel büyüklüğün kartezyen koordinat sistemindeki maddesel türevi;

$$\frac{D(\dots)}{Dt} = \frac{\partial(\dots)}{\partial t} + \left(\vec{V}.\nabla\right)(\dots) = \frac{\partial(\dots)}{\partial t} + u\frac{\partial(\dots)}{\partial x} + v\frac{\partial(\dots)}{\partial y} + w\frac{\partial(\dots)}{\partial z} \tag{2.17}$$

olarak ifade edilir [Anderson et al., 2009].

2.1.1.1. Kartezyen Koordinat Sisteminde Kütlenin Korunumu Denklemi

Bölüm 2.1.1.'de ifade edilen herhangi bir fiziksel büyüklüğün kartezyen koordinat sisteminde diverjansını ifade eden (2.16) no.'lu denklem, akış alanındaki hız vektörel büyüklüğü için yazılırsa;

$$div\left(\vec{V}\right) = \vec{\nabla}.\left(\vec{V}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.18}$$

olarak elde edilir.

Bölüm 2.1.1.'de ifade edilen (2.13) no.'lu denklemin her iki tarafı ρ terimi ile çarpılırsa;

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left(\vec{\nabla}.\vec{V}\right) = 0 \tag{2.19}$$

olarak elde edilir. (2.19) no.'lu denklemin sol tarafında yer alan 1. terim, bölüm 2.1.1.'de ifade edilen (2.17) no.'lu denkleme eşittir. Denklemin sol tarafında yer alan 2. terim ise (2.18) no.'lu denklemin her iki tarafının ρ terimi ile çarpılması sonucu elde edilen ifadeye eşittir. Buna göre (2.19) no.'lu denklem yeniden düzenlenirse;

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \left(\rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \tag{2.20}$$

olarak elde edilir. (2.20) no.'lu denklem aşağıdaki gibi düzenlenirse;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\rho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \left(\rho\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \left(\rho\frac{\partial w}{\partial z} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) = 0 \tag{2.21}$$

olarak elde edilir. (2.21) no.'lu denklemin sol tarafında yer alan parantez içerisindeki 2., 3. ve 4. terimler sırasıyla $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}$, $\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}$ ve $\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$ kısmî türevlerine eşittir. Buna göre (2.21) no.'lu denklem yeniden düzenlenirse;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \tag{2.22}$$

olarak akış alanı içerisinde alınan dx, dy, dz boyutlarında sonsuz küçük kontrol hacmi için kartezyen koordinat sisteminde Kütlenin Korunumu Denklemi elde edilir [Çengel ve Cimbala, 2007].

İki-boyutlu, daimî ve sıkıştırılamaz akış problemlerine ait Kütlenin Korunumu Denklemi'nin başka bir ifadeyle; Süreklilik Denklemi'nin elde edilebilmesi amacıyla (2.22) no.'lu denklemde $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ alınır ve denklemin her iki tarafı ρ terimine bölünürse;

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.23}$$

olarak iki-boyutlu, daimî ve sıkıştırılamaz akış problemlerine ait kartezyen koordinat sisteminde Kütlenin Korunumu Denklemi başka bir ifadeyle; Süreklilik Denklemi elde edilir.

2.1.2. Momentumun Korunumu Denklemleri (Navier-Stokes Akış Denklemleri)

Herhangi bir cismin hızı ile kütlesinin çarpımı cismin doğrusal momentumu veya sadece cismin momentumu olarak tanımlanır ve $\vec{V}$ hızıyla hareket eden m kütleli bir cismin momentumu $m\vec{V}$'dir [Serway, 1995]. Newton'un ikinci yasasına göre herhangi bir cismin ivmesi, cisme etki eden net kuvvet ile doğru orantılı, cismin kütlesi ile ters orantılı olarak değişir ve cismin momentumunun değişim hızı, cisme etki eden net kuvvete eşittir. Dolayısıyla herhangi bir sistemin momentumu, sisteme etki eden net kuvvet sıfır (0) olduğunda sabit kalır ve böylece sistemin momentumu korunmuş olur. Bu durum, Momentumun Korunumu İlkesi olarak adlandırılır [Çengel ve Cimbala, 2007]. Newton'un ikinci (hareket) yasası:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} \tag{2.24}$$

olarak ifade edilir [Serway, 1995]. (2.27) no.'lu denklemde; $\vec{F}$ cisme etkiyen net kuvvet, $\vec{a}$ terimi ise $\vec{F}$ kuvvetinin etkisindeki cismin ivmesidir.

2.1.2.1. Momentumun Korunumu Denklemlerinin Vektörel Formda İfadesi

Bu bölümde, kayma gerilmesinin şekil değişim (deformasyon) hızıyla doğrusal olarak değiştiği akışkanlar olarak tanımlanan *Newton (Newtonian) Akışkanlar* dikkate alınarak Doğrusal Momentumun Korunum Denklemleri başka bir ifadeyle; Navier-Stokes Akış Denklemleri vektörel formda ifade edilmeye çalışılmıştır.

Isaac Newton, 17. yüzyılın sonlarına doğru, herhangi bir akışkanın kesme (kayma) geriliminin, gerilimin zamana oranı ifadesi ile orantısal olarak değiştiğini ifade etmiştir. Buna göre kesme (kayma) geriliminin hız gradyeni (şekil değişim hızı) ile orantısal olarak değiştiği akışkanlar *Newton (Newtonian) Akışkanlar* olarak adlandırılır.

Sabit viskoziteli, sıkıştırılamaz Newton (Newtonian) Akışkanlar için Navier-Stokes Akış Denklemi'nin vektörel formda en genel ifadesi;

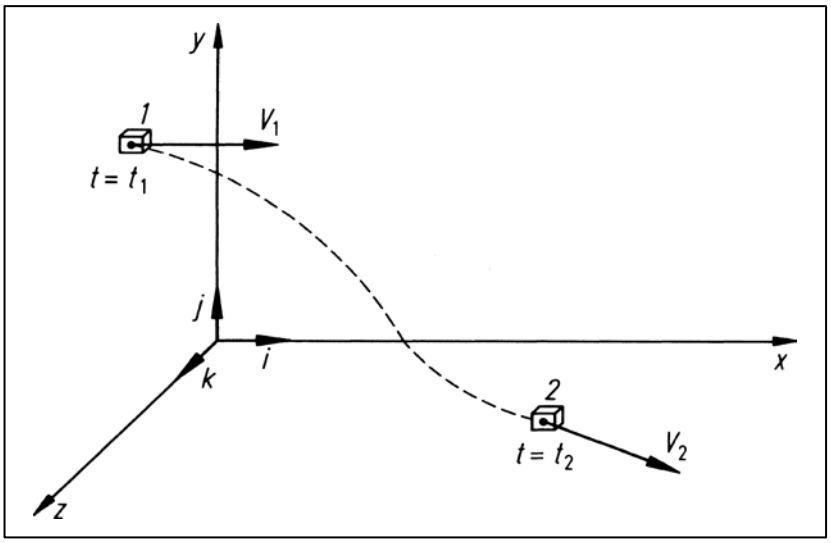
$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} \right] = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \mu\overrightarrow{\nabla^2}\,\vec{V} \qquad (2.25)$$

olarak ifade edilir [Çengel ve Cimbala, 2007]. (2.25) no.'lu denklemde;

- $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$: Yerel (lokal) ivme
- $(\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V}$: Konvektif (taşınımsal) ivme
- $\vec{\nabla}P$: Basınç gradyeni
- $\rho\vec{g}$: Birim hacim için yerçekimi kuvveti
- $\mu\overrightarrow{\nabla^2}\,\vec{V}$: Viskoz kuvvetler
- $\vec{V}$: Hız vektörü $[m/s]$
- P: Termodinamik basınç $[Pa = N/m^2]$
- ν: Kinematik viskozite $[m^2/s]$
- ρ: Akışkanın yoğunluğu $[kg/m^3]$

ifadelerine karşılık gelir.

$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ terimine karşılık gelen yerel (lokal) ivme, akış alanı içerisinde alınan sabit bir noktadaki herhangi bir fiziksel büyüklüğün zamana göre değişimini ifade etmektedir. $(\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V}$ terimine karşılık gelen konvektif (taşınımsal) ivme ise akış alanı içerisinde farklı fiziksel özelliklerdeki bir konumdan farklı fiziksel özelliklerdeki diğer bir konuma hareket eden akışkan elemanınına ait fiziksel büyüklüğün zamana göre değişimini ifade etmektedir ve hız bağımsız değişkeni için maddesel türev, bu iki ivme teriminin toplamı olarak ifade edilir [Anderson et al., 2009]. Üç-boyutlu akış alanı içerisinde herhangi bir noktada alınan akışkan elemanının zamana göre konum ve hız değişimi Şekil 2.2'de gösterilmiştir [Anderson et al., 2009].



Şekil 2.2: Üç-boyutlu akış alanı içerisinde alınan akışkan elemanının zamana bağlı olarak akış alanı içerisindeki konum ve hız değişimi.

(2.25) no.'lu denklemde yer alan her bir terim ρ çarpanına bölünürse;

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} = -\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \vec{g} + \frac{\mu}{\rho}\overrightarrow{\nabla^2}\,\vec{V} \tag{2.26}$$

olarak sabit viskoziteli, sıkıştırılamaz Newton (Newtonian) akışkanlar için Navier-Stokes Akış Denklemi'nin alternatif formu elde edilir. (2.26) no.'lu denklemin sağındaki ikinci terimde yer alan $\frac{\mu}{\rho}$ oranı, literatürde akışkanın *mutlak viskozitesinin* başka bir ifadeyle; *dinamik viskozitesinin* akışkanın yoğunluğuna oranı olarak tanımlanan *kinematik viskozite* ifadesine karşılık gelir ve literatürde kinematik viskozite ν sembolü ile belirtilir. Buna göre yukarıda ifade edilen denklemde $\frac{\mu}{\rho}$ oranı yerine kinematik viskoziteye karşılık gelen ν sembolü yazılırsa;

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} = -\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \vec{g} + \nu\overrightarrow{\nabla^2}\,\vec{V} \tag{2.27}$$

olarak sabit viskoziteli, sıkıştırılamaz Newton (Newtonian) Akışkanlar için Navier-Stokes Akış Denklemi'nin ikinci bir alternatif formu elde edilir.

Navier-Stokes Akış Denklemi'nin vektörel formda ifadesi olan (2.27) no.'lu denklemde yer alan konvektif (taşınımsal) ivme terimi, vektör özdeşliğinden yararlanarak;

$$(\vec{V}\,\vec{\nabla})\vec{V} = \vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}x(\vec{\nabla}\,x\,\vec{V}) \tag{2.28}$$

olarak ifade edilir. (2.28) no.'lu denklemde yer alan V, $\vec{V}$ vektörünün büyüklüğüdür. (2.28) no.'lu denklemin sağındaki parantez içindeki ikinci terim ise Vortisite başka bir ifadeyle; Çevrinti vektörü $\vec{\zeta}$ (veya $\vec{\omega}$) olup bir akışkan elemanının (parçacığının) dönmesinin bir ölçüsü olarak tanımlanır. Başka bir ifadeyle; bir akışkan parçacığının açısal hızının (birim zamandaki devir sayısının) iki katına eşit vektörel büyüklük olarak tanımlanır [Çengel ve Cimbala, 2007].

Vortisite (Çevrinti) vektörü, literatürde genellikle aşağıdaki formda ifade edilir;

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla}x\vec{V} = curl(\vec{V}) = rot(\vec{V}) \tag{2.29}$$

Bu çalışmada Vortisite (Çevrinti) vektörünü ifade etmek amacıyla $\vec{\zeta}$ sembolü yerine $\vec{\omega}$ sembolü kullanılmıştır.

(2.29) no.'lu denklemde yer alan matematiksel operatör olan $curl$ operatörü;

$$curl(\vec{\ldots}) = \nabla \times (\vec{\ldots}) \tag{2.30}$$

olarak ifade edilir [Masatsuka, 2013].

Yukarıda ifade edilen (2.27) no.'lu Navier-Stokes Denklemi'nin genel ifadesinde bağımsız değişken olan hız değişkeni yerine Vortisite kullanılarak Vortisite bağımsız değişkeni cinsinden sıkıştırılamaz Navier-Stokes Denklemin'nin en genel ifadesi elde edilmeye çalışılır. Buna göre birtakım matematiksel işlemler yapılarak Vortisite bağımsız değişkeni cinsinden sıkıştırılamaz Navier-Stokes Denklemi'nin en genel ifadesi olan (2.43) no.'lu denklem elde edilir. Buna göre yapılan matematiksel işlemlerin tamamı aşağıdaki gibi ifade edilir;

(2.28) no.'lu vektör özdeşliği, (2.27) no.'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left[\vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}x\left(\vec{\nabla}x\vec{V}\right)\right] = -\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \nu\vec{\nabla}^2\vec{V} \tag{2.31}$$

olarak elde edilir. (2.31) no.'lu denklemin sağ tarafında yer alan vektörel büyüklük olan $\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right)$ terimine matematiksel operatör olan $curl$ operatörü uygulanması sonucu 0'a eşit olduğu görülür.

$$curl\left(\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right)\right) = \vec{\nabla}x\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right) = 0 \tag{2.32}$$

Herhangi bir skaler büyüklüğün gradyenine $curl$ operatörü uygulanması sonucu çıkan değer 0'a eşittir [Masatsuka, 2013];

$$curl\left(\vec{\nabla}(\dots)\right) = \vec{\nabla}x\vec{\nabla}(\dots) = 0 \tag{2.33}$$

(2.31) no.'lu denklemin sol tarafında yer alan $\left[\vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}x\left(\vec{\nabla}x\vec{V}\right)\right]$ ifadesinde $\vec{\nabla}x\vec{V}$ terimi $\vec{\omega}$'ya eşit olduğundan dolayı;

$$\vec{V}x\left(\vec{\nabla}x\vec{V}\right) = \vec{V}x\vec{\omega} \tag{2.34}$$

eşitliği yazılır. (2.31) no.'lu denkleme $curl$ operatörü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} curl\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right) + curl\left(\vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right)\right) - curl\left(\vec{V}x\left(\vec{\nabla}x\vec{V}\right)\right) \\ = -curl\left(\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right)\right) + curl\left(\nu\vec{\nabla}^2\vec{V}\right) \end{aligned} \tag{2.35}$$

olarak elde edilir. Herhangi bir skaler büyüklüğünün gradyenine $curl$ operatörü uygulanması sonucu çıkan değer 0'a eşit olduğundan dolayı (2.35) no.'lu denklemin

sol tarafında yer alan 2. terim ile sağ tarafında yer alan 1. terimin değerleri 0'a eşittir. Denklemin sol tarafında yer alan 3. terime karşılık gelen ifade ise (2.34) no.'lu denklem göz önüne alınarak $\vec{\nabla}x(\vec{V}x\vec{\omega})$ olarak elde edilir. Buna göre (2.35) no.'lu denklem yeniden düzenlenirse;

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}-\vec{\nabla}x(\vec{V}x\vec{\omega})=\nu\vec{\nabla}^2\vec{\omega} \tag{2.36}$$

olarak elde edilir. (2.36) no.'lu denklemde yer alan $\vec{\nabla}x(\vec{V}x\vec{\omega})$ terimi için yazılan vektör özdeşliği;

$$\vec{\nabla}x(\vec{V}x\vec{\omega})=\vec{V}(\vec{\nabla}.\vec{\omega})-\vec{\omega}(\vec{\nabla}.\vec{V})-(\vec{V}\vec{\nabla})\vec{\omega}+(\vec{\omega}\vec{\nabla})\vec{V} \tag{2.37}$$

olarak ifade edilir. (2.37) no.'lu denklemin sağ tarafında yer alan 1. ve 2. terimlerin değeri 0'a eşittir; çünkü $curl$'ü alınmış herhangi bir vektörel büyüklüğün diverjansı 0'a eşittir [Masatsuka, 2013]. Dolayısıyla Vortisite'nin diverjansı;

$$div\vec{\omega}=\vec{\nabla}.\vec{\omega}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}x\vec{V})=0 \tag{2.38}$$

olarak ifade edilir. (2.37) no.'lu denklemin sağ tarafında yer alan son terimin değeri ise bölüm 2.1.1.'de ifade edilen Süreklilik Denklemi'ne göre 0'a eşittir. Buna göre (2.38) no.'lu denklem yeniden düzenlenirse Vortisite vektörü için yazılan vektör özdeşliğinin son ifadesi;

$$\vec{\nabla}x(\vec{V}x\vec{\omega})=-(\vec{V}.\vec{\nabla}).\vec{\omega} \tag{2.39}$$

olarak elde edilir ve bu denklem, (2.36) no.'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}+(\vec{V}.\vec{\nabla}).\vec{\omega}=\nu.\vec{\nabla}^2\vec{\omega} \tag{2.40}$$

olarak elde edilir. (2.40) no.'lu denklemin sol tarafında yer alan iki terimin toplamı, Vortisite değişkenine göre toplam türevi başka bir ifadeyle; materyal türevi ifade etmektedir. Denklemin sol tarafında yer alan 2. terim ise;

$$\left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right).\vec{\omega} = u\frac{\partial\omega}{\partial x} + v\frac{\partial\omega}{\partial y} + w\frac{\partial\omega}{\partial z} \tag{2.41}$$

olarak ifade edilir ve bu denklem (2.40) no.'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + u\frac{\partial\omega}{\partial x} + v\frac{\partial\omega}{\partial y} + w\frac{\partial\omega}{\partial z} = \nu.\overrightarrow{\nabla}^2\vec{\omega} \tag{2.42}$$

olarak elde edilir. (2.42) no.'lu denklemin sol tarafında yer alan ifade Vortisite değişkeninin maddesel türevini ifade etmektedir. Buna göre (2.42) no.'lu denklem yeniden düzenlenirse;

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right).\vec{\omega} = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + u\frac{\partial\omega}{\partial x} + v\frac{\partial\omega}{\partial y} + w\frac{\partial\omega}{\partial z} = \nu.\overrightarrow{\nabla}^2\vec{\omega} \tag{2.43}$$

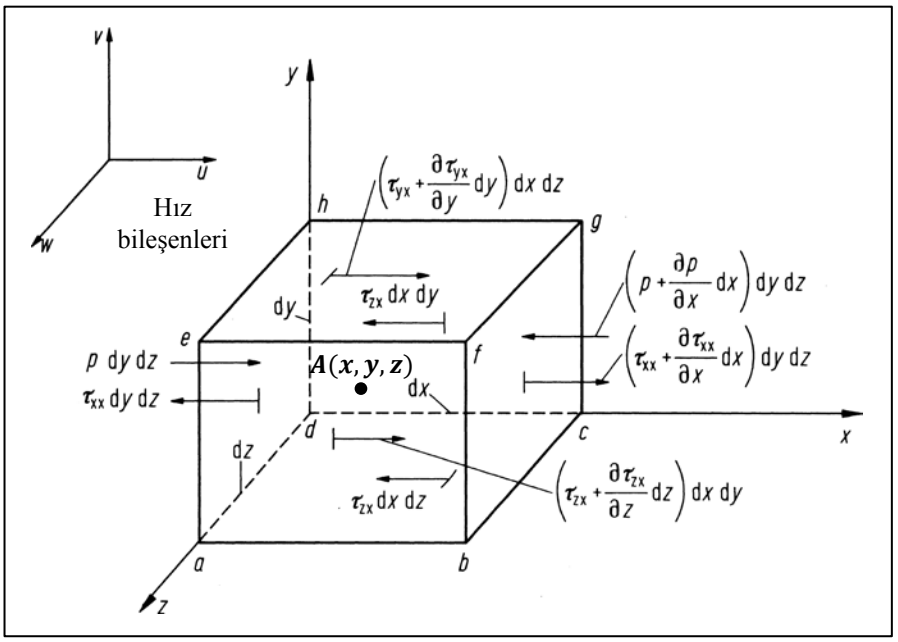
olarak Vortisite bağımsız değişkeni cinsinden sıkıştırılamaz Navier-Stokes Denklemi'nin en genel ifadesi elde edilir.

2.1.2.2. Kartezyen Koordinat Sisteminde Momentumun Korunumu Denklemleri

Bölüm 2.1.1.'de Kütlenin Korunumu'na ait diferansiyel denklemin elde edilebilmesi için Diverjans Teoremi uygulanmıştır; ancak Diverjans Teoremi ile birlikte ikinci bir yöntem olarak sonsuz küçük kontrol hacmi kullanılarak Taylor Seri Açılımı Yöntemi kullanılarak da aynı ifadenin elde edilebileceği vurgulanmıştır. Bu bölümde ise Momentumun Korunumu Denklemleri'nin ifadesi için dx, dy ve dz boyutlarındaki sonsuz küçük bir kontrol hacmi dikkate alınarak Şekil 2.3'te gösterildiği gibi bu kontrol hacmi üzerindeki orijin noktasından uzakta herhangi bir A noktası için kontrol hacminin ön, arka, üst, alt, sağ ve sol yan yüzeyler olmak üzere altı farklı yüzeyi olduğundan her bir yüzey için Taylor Seri Açılımı

uygulanarak her bir yüzeye etkiyen kuvvetler belirlenip kartezyen koordinat sisteminde Momentumun Korunumu Denklemleri ifade edilmiştir.

Kartezyen koordinat sisteminde sıkıştırılamaz Navier-Stokes Denklemleri, akış alanı içerisinde alınan ve akış alanı içerisinde akım çizgileri doğrultusunda hareket eden sonsuz küçük boyutta kontrol hacmi kullanılarak türetilir [Anderson et al., 2009].



Şekil 2.3: Sonsuz küçük boyutlardaki kontrol hacmi ve bu konrol hacmine x-ekseni yönünde etkiyen kuvvetler.

Newton'un ikinci (hareket) yasası, "*bir cismin ivmesi, ona etki eden toplam kuvvetle doğru orantılı, kütlesi ile ters orantılıdır*" olarak ifade edilir [Serway, 1995]. Newton'nun ikinci (hareket) yasası, matematiksel olarak aşağıdaki denklemle ifade edilir [Serway, 1995];

$$\sum F = ma \tag{2.44}$$

(2.44) no.'lu denklemde ifade edilen toplam kuvvetin x, y ve z bileşenleri olmak üzere üç farklı bileşeni vardır. Newton'un ikinci (hareket) yasası (2.45 no.'lu denklem), Şekil 2.3'te gösterilen sonsuz küçük kontrol hacmine uygulanarak x-ekseni yönündeki Momentumun Korunumu Denklemi ifade edilmeye çalışılacaktır.

Dikkate alınan sonsuz küçük kontrol hacmine etkiyen toplam kuvvetin x-ekseni yönündeki bileşeni;

$$F_x = ma_x \tag{2.45}$$

olarak ifade edilir.

Akış alanı içerisinde dikkate alınan dx, dy ve dz boyutlarındaki sonsuz küçük kontrol hacmi, kütle kuvvetleri başka bir ifadeyle; bünyesel kuvvetler ve yüzey kuvvetleri olmak üzere iki farklı kuvvet etkisi altında hareket eder. Kütle kuvvetleri (bünyesel kuvvetler), sonsuz küçük akışkan elemanının içindeki kütlenin tamamına etki eden kuvvettir. Örneğin; yerçekimi kuvveti, elektriksel ve manyetik kuvvetler kütle kuvvetleri (bünyesel kuvvetler) olarak tanımlanır [Anderson et al., 2009]. Şekil 2.3'te gösterilen sonsuz küçük kontrol hacmine x-ekseni yönünde etkiyen net kütle kuvvetleri, yalnızca yerçekimi kuvveti olarak dikkate alındığından dolayı;

$$(F_x)_{kütle} = (F_x)_{yerçekimi} = \rho g_x (dxdydz) \tag{2.46}$$

olarak ifade edilir [Anderson et al., 2009]. Şekil 2.3'te gösterilen sonsuz küçük kontrol hacmine x-ekseni yönünde etkiyen net basınç kuvvetleri;

$$(F_x)_{basınç} = \left[P - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx\right)\right] dydz \tag{2.47}$$

olarak ifade edilir [Anderson et al., 2009]. Şekil 2.3'te gösterilen sonsuz küçük kontrol hacmine x-ekseni yönünde etkiyen net viskoz kuvvetler;

$$\begin{aligned}(F_x)_{viskoz} = &\left[\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx\right) - \tau_{xx}\right] dydz \\ &+ \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) - \tau_{yx}\right] dxdz + \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) - \tau_{zx}\right] dxdy\end{aligned} \tag{2.48}$$

olarak ifade edilir [Anderson et al., 2009]. Sonsuz küçük kontrol hacmine x-ekseni yönünde etkiyen net yüzey kuvvetleri yukarıda ifade edilen basınç kuvvetleri ile

viskoz kuvvetlerin toplamıdır. Buna göre sonsuz küçük kontrol hacmine x-ekseni yönünde etkiyen net yüzey kuvvetleri;

$$(F_x)_{yüzey} = (F_x)_{basınç} + (F_x)_{viskoz} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}(F_x)_{yüzey} = &\left[P - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}dx\right)\right]dydz \\ &+ \left[\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}dx\right) - \tau_{xx}\right]dydz + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right) - \tau_{yx}\right]dxdz \\ &+ \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right) - \tau_{zx}\right]dxdy\end{aligned} \tag{2.50}$$

olarak ifade edilir. Sonsuz küçük kontrol hacmine x-ekseni yönünde etkiyen toplam kuvvetler ise kütle kuvvetleri ile yüzey kuvvetlerinin toplamıdır. Buna göre sonsuz küçük kontrol hacmine x-ekseni yönünde etkiyen toplam kuvvetler;

$$F_x = (F_x)_{kütle} + (F_x)_{yüzey} \tag{2.51}$$

$$F_x = \left(-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz + \rho g_x dxdydz \tag{2.52}$$

olarak ifade edilir. dx, dy ve dz boyutlarındaki sonsuz küçük kontrol hacminin toplam kütlesi;

$$m = \rho dxdydz \tag{2.53}$$

olarak ifade edilir. Sonsuz küçük kontrol hacminin x-ekseni yönündeki toplam ivmesi;

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \tag{2.54}$$

olarak ifade edilir. Yukarıda ifade edilen (2.52), (2.53) ve (2.54) no.'lu denklemler, (2.45) no.'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$\left(-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz+\rho g_x dxdydz = (\rho dxdydz)\frac{Du}{Dt} \tag{2.55}$$

$$\rho\frac{Du}{Dt}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+\rho g_x \tag{2.56}$$

olarak viskoz ve sıkıştırılamaz akışlar için x-ekseni yönündeki Momentumun Korunumu Denklemi elde edilir ve y- ve z-eksenleri yönündeki Momentumun Korunumu Denklemleri de benzer şekilde elde edilir. Buna göre viskoz ve sıkıştırılamaz akışlar için y- ve z-eksenleri yönündeki Momentumun Korunumu Denklemleri sırasıyla;

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=\left(-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)+\rho g_y \tag{2.57}$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=\left(-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right)+\rho g_z \tag{2.58}$$

olarak ifade edilir.

(2.56), (2.57) ve (2.58) no.'lu denklemler olarak viskoz ve sıkıştırılamaz akışlar için ifade edilen x-, y- ve z-eksenleri yönündeki Momentumun Korunumu Denklemleri *konservatif olmayan* formdadır. Gerekli dönüşümler ve aritmetik işlemler yapılarak viskoz ve sıkıştırılamaz akışlar için x-, y- ve z-eksenleri yönündeki momentumun korunumu denklemleri *konservatif* formda elde edilmeye çalışılacaktır. Bunun için öncelikle x-ekseni yönündeki Momentumun Korunumu Denklemi'nin *konservatif* formu elde edilmeye çalışılacaktır.

Viskoz akışlar için x-ekseni yönündeki Momentumun Korunumu Denklemi olarak ifade edilen (2.56) no.'lu denklemde yer alan x-ekseni yönündeki hız bileşeninin maddesel türevine karşılık gelen matematiksel ifade yazılırsa;

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \vec{V}.\nabla u \tag{2.59}$$

olarak elde edilir. (2.59) no.'lu denklemin sağ tarafındaki ilk terime karşılık gelen matematiksel ifade (çarpım hâlindeki iki ifadenin türevi) yazılırsa;

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.60}$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.61}$$

olarak elde edilir. (2.59) no.'lu denklemin sağ tarafındaki son terime karşılık gelen matematiksel ifade yazılırsa;

$$\nabla.\left(\rho u \vec{V}\right) = u\nabla.\left(\rho \vec{V}\right) + \left(\rho \vec{V}\right).\nabla u \tag{2.62}$$

$$\rho \vec{V}.\nabla u = \nabla.\left(\rho u \vec{V}\right) - u\nabla.\left(\rho \vec{V}\right) \tag{2.63}$$

olarak elde edilir. Yukarıda ifade edilen (2.61) ve (2.63) no.'lu denklemler, (2.59) no.'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\left(\rho u \vec{V}\right) - u\nabla.\left(\rho \vec{V}\right) \tag{2.64}$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \vec{V}\right)\right] + \nabla.\left(\rho u \vec{V}\right) \tag{2.65}$$

olarak elde edilir. (2.65) no.'lu denklemin sağ tarafında yer alan köşeli parantez içindeki terim Süreklilik Denklemi olduğundan dolayı bu terimin değeri 0'a eşittir. Buna göre (2.65) no.'lu denklem yeniden düzenlenirse;

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla.\left(\rho u \vec{V}\right) \tag{2.66}$$

olarak son hâli elde edilir. (2.66) no.'lu denklem, yukarıda ifade edilen (2.56) no.'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla.\left(\rho u\vec{V}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x \tag{2.67}$$

olarak viskoz ve sıkıştırılamaz akışlar için x-ekseni yönündeki Momentumun Korunumu Denklemi'nin *konservatif* formu elde edilir ve y ve z-eksenleri yönünde Momentumun Korunumu Denklemleri'nin *konservatif* formları da benzer şekilde elde edilir. Buna göre viskoz ve sıkıştırılamaz akışlar için y ve z-eksenleri yönünde Momentumun Korunumu Denklemleri'nin *konservatif* formları sırasıyla;

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla.\left(\rho v\vec{V}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y \tag{2.68}$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla.\left(\rho w\vec{V}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g_z \tag{2.69}$$

olarak ifade edilir. Yukarıda ifade edilen Momentumun Korunumu Denklemleri aynı zamanda *Navier-Stokes Denklemleri* olarak da adlandırılır [Anderson et al., 2009].

Pratikte aerodinamik problemlerin hemen hemen tamamında dikkate alınan akışkanın Newtonian akışkan olduğu düşünülür ve buna göre çözüm üretilir [Anderson et al., 2009]. İngiliz bilim adamı George Gabriel Stokes 1845 yılında Newtonian akışkanlar için kesme (kayma) gerilmesine ait aşağıdaki denklemleri elde etmiştir;

$$\tau_{xx} = \lambda\nabla.\vec{V} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.70}$$

$$\tau_{yy} = \lambda\nabla.\vec{V} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.71}$$

$$\tau_{zz} = \lambda\nabla.\vec{V} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.72}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2.73}$$

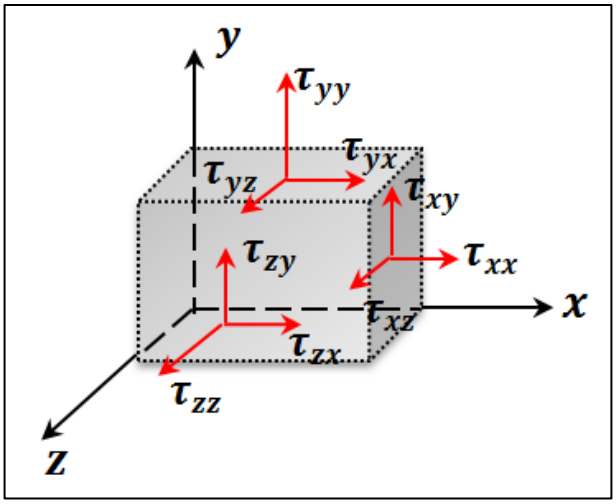
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{2.74}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{2.75}$$

Yukarıda ifade edilen (2.70), (2.71), (2.72), (2.73), (2.74) ve (2.75) no.'lu denklemlerde;

- μ: Moleküler viskozite katsayısı (Molecular viscosity coefficient)
- λ: Hacimsel viskozite katsayısı (Bulk viscosity coefficient)

ifadelerine karşılık gelmektedir.



Şekil 2.4: Kontrol hacminin her bir yüzüne etkiyen viskoz gerilme bileşenleri.

İngiliz bilim adamı George Gabriel Stokes, hacimsel viskozite katsayısı ile moleküler viskozite katsayısı arasında aşağıdaki hipotezi sunmuştur ve bu hipotez literatürde *Stokes Hipotezi* olarak ifade edilir [Anderson et al., 2009];

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \tag{2.76}$$

Hacimsel viskozite katsayısı ile moleküler viskozite katsayısı arasındaki ilişkiyi veren (2.76) no.'lu denklem akış problemlerinde sıklıkla kullanılmaktadır; ancak bu hipotezin doğruluğu günümüzde henüz tespit edilememiştir [Anderson et al., 2009].

Yukarıda ifade edilen (2.70), (2.71), (2.72), (2.73), (2.74) ve (2.75) no.'lu denklemler, (2.67), (2.68) ve (2.69) no.'lu denklemlerde yerine yazılırsa x-, y- ve z eksenleri yönündeki Momentumun Korunumu Denklemleri'nin tamamı *konservatif* formda sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

x-ekseni yönünde (*konservatif* formda bütün terimleri içeren başka bir ifadeyle; hiçbir terimin ihmal edilmediği) Momentumun Korunumu Denklemi;

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\nabla.\vec{V}+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\rho g_x \tag{2.77}$$

nihaî olarak elde edilir.

y-ekseni yönünde (*konservatif* formda bütün terimleri içeren başka bir ifadeyle; hiçbir terimin ihmal edilmediği) Momentumun Korunumu Denklemi;

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\nabla.\vec{V}+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]+\rho g_y \tag{2.78}$$

nihaî olarak elde edilir.

z-ekseni yönünde (*konservatif* formda bütün terimleri içeren başka bir ifadeyle; hiçbir terimin ihmal edilmediği) Momentumun Korunumu Denklemi;

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u w)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v w)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z}$$
$$=-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] \tag{2.79}$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\nabla.\vec{V}+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\rho g_z$$

nihaî olarak elde edilir.

Sabit viskoziteli ve sıkıştırılamaz (sabit yoğunluklu) Newton tipi akışkanlar için;

- x-ekseni yönündeki Momentumun Korunumu Denklemi:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\rho g_x \tag{2.80}$$

- y-ekseni yönündeki Momentumun Korunumu Denklemi:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$=-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\rho g_y \tag{2.81}$$

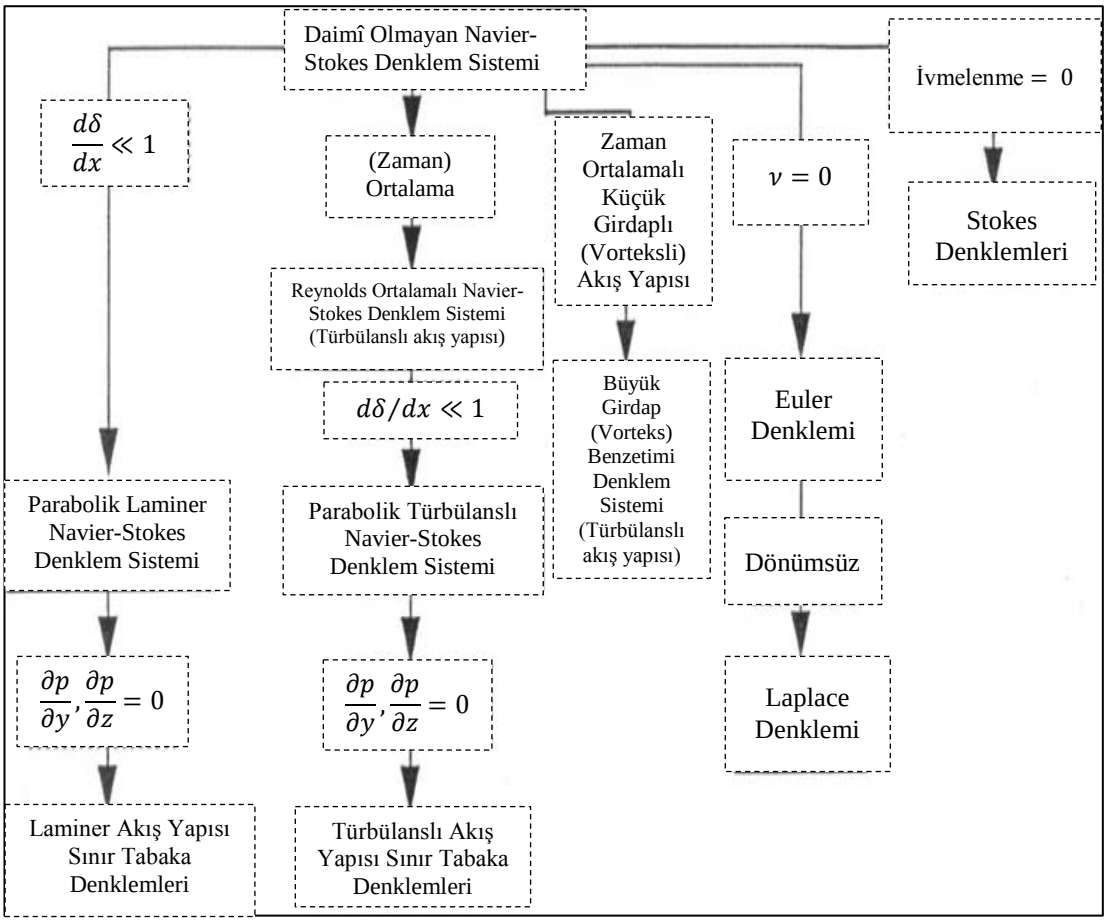
- z-ekseni yönündeki Momentumun Korunumu Denklemi:

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
$$=-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\rho g_z \tag{2.82}$$

olarak ifade edilir.

Yukarıda ifade edilen Momentumun Korunumu Denklemleri başka bir ifadeyle; Navier-Stokes Denklemleri, uygulamada karşılaşılan mühendislik problemlerinde birtakım kabuller ve/veya varsayımlar dikkate alınarak çözülmeye

çalışılır. Buna göre Şekil 2.5'te birtakım kabuller ve/veya varsayımlar dikkate alınarak Navier-Stokes Denklemleri sınıflandırılmıştır ve dikkate alınan kabuller ve/veya varsayımlar kesik çizgili kutular içerisinde ifade edilmiştir [Cebeci et al., 2005].



Şekil 2.5: Kısmî yaklaşım ile Navier-Stokes Denklemleri.

Sıkıştırılamaz akışlar için ifade edilen Navier-Stokes Denklem Sistemi'nin genel ifadesi, 4 temel matematiksel nicelik içermektedir. Bu temel matematiksel nicelikler; yerel ivmelenme, konvektif (taşınımsal) ivmelenme, basınç gradyenleri ve viskoz kuvvetlerdir. İncelenen akış probleminin fiziksel özelliklerine göre bu temel niceliklerin bazıları çözüm aşamasında göz önüne alınmamaktadır. Akışkanlar Dinamiği literatüründe karşılaşılan akış problemlerinde göz önüne alınan Navier-Stokes Denklem Sistemi'nde yer alan temel matematiksel nicelikler, akış probleminin fiziksel özellikleri göz önüne alınarak $\surd$ işareti ile Tablo 2.1'de gösterilmiştir [Bakkér, 2006].

Tablo 2.1: Akış probleminin fiziksel özelliklerine göre Navier-Stokes Denklem Sistemi'nde göz önüne alınan matematiksel nicelikler.

	Navier-Stokes Denklem Sistemi'nin Genel İfadesi			
	$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u.\nabla u = -\nabla P + \mu\nabla^2 u$			
Akış türü	Yerel ivmelenme	Taşınımsal ivmelenme	Basınç gradyenleri	Viskoz kuvvetler
Boru iç akışı (daimî, laminer akış)			✓	✓
Plaka üzerinden akış (*impulsively started* (anlık harekete başlayan))	✓			✓
Plaka üzerinden akış (sınır tabaka)		✓		✓
Kanat profili etrafından akış (inviscid akış)		✓	✓	
Boru iç akışı (inviscid anlık harekete başlayan)	✓		✓	
Silindir etrafından akış (daimî, viskoz akış)		✓	✓	✓
Kanat profili etrafından akış (zamana bağımlı akış)	✓	✓	✓	✓

2.1.3. Enerjinin Korunumu Denklemleri

Bu çalışma kapsamında iki-boyutlu, daimî ve sıkıştırılamaz akış problemleri için geliştirilen nümerik formülasyon elde edilirken enerji denklemleri çözülmemiştir; çünkü formülasyon izo-enerjetik, sabit viskoziteli ve sıkıştırılamaz akış problemleri için geliştirilmiştir. Akışkanlar Dinamiği literatüründe yer alan yayınların hemen hemen tamamında Temel Korunum Denklemleri'nden bahsedilirken Enerjinin Korunumu Denklemi de dikkate alınır. Dolayısıyla bu

çalışmada da bütünlüğü bozmamak adına Enerjinin Korunumu Denklemleri'ne yer verilmiştir.

Bölüm 2.1.1.'de ve bölüm 2.1.2.'de sırasıyla Kütlenin ve Momentumun Korunumu Denklemleri elde edilirken dx, dy ve dz boyutlarında sonsuz küçük kontrol hacmi dikkate alınmıştır ve bu kontrol hacmi için Kütlenin ve Momentumun Korunumu Denklemleri türetilmiştir. Enerjinin Korunumu Denklemi de benzer şekilde dx, dy ve dz boyutlarında sonsuz küçük kontrol hacmi dikkate alınarak elde edilir; ancak uzun aritmetik işlemlerle denklemin türetilmesi yerine direkt olarak *konservatif olmayan* ve *konservatif* formları sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiştir [Anderson et al., 2009];

$$\begin{aligned}\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right) &= \rho\dot{q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\\ &-\frac{\partial(uP)}{\partial x}-\frac{\partial(vP)}{\partial y}-\frac{\partial(wP)}{\partial z}+\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}\\ &+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}+\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}\\ &+\rho\vec{f}\vec{V}\end{aligned} \tag{2.83}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\nabla.\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\vec{V}\right)\right] &= \rho\dot{q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\\ &+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)-\frac{\partial(uP)}{\partial x}-\frac{\partial(vP)}{\partial y}-\frac{\partial(wP)}{\partial z}\\ &+\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}\\ &+\frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}+\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}+\rho\vec{f}\vec{V}\end{aligned} \tag{2.84}$$

2.2. Diferansiyel Akış Analizi ve 4. Hata Mertebesinden Hassasiyet ile Nümerik Çözüm Yöntemi

2.2.1. Navier-Stokes Denklem Sisteminin İki-Boyutlu Kartezyen Koordinat Sisteminde İfadesi

Bölüm 2.1.2.2.'de ifade edilen x-, y- ve z-eksenleri yönündeki Momentumun Korunumu Denklemleri'nden x- ve y-eksenleri yönünde Momentumun Korunumu Denklemleri göz önüne alınır ve bu denklemler iki-boyutlu, daimî ve sıkıştırılamaz akış problemleri için ifade edilir.

Bölüm 2.1.2.2.'de (2.80) no.'lu denklem olarak ifade edilen x-ekseni yönündeki Momentumun Korunumu Denklemi'nin genel ifadesinde $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ alınır ve denklemin her iki tarafı ρ çarpanına bölünürse;

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + g_x \tag{2.85}$$

olarak (2.85) no.'lu denklem elde edilir ve bu denklemde $\frac{\mu}{\rho}$ oranı yerine kinematik viskoziteye karşılık gelen ν terimi yazılır ve bu denklemde dış kuvvetler hesaba katılmazsa başka bir ifadeyle; $g_x = 0$ alınırsa;

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2.86}$$

olarak iki-boyutlu, daimî ve sıkıştırılamaz akış problemleri için x-ekseni yönündeki Momentumun Korunumu Denklemi elde edilir.

Bölüm 2.1.2.2.'de (2.81) no.'lu denklem olarak ifade edilen y-ekseni yönündeki Momentumun Korunumu Denklemi'nin genel ifadesinde $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$ alınır ve denklemin her iki tarafı ρ çarpanına bölünürse;

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + g_y \tag{2.87}$$

olarak (2.87) no.'lu denklem elde edilir ve bu denklemde $\frac{\mu}{\rho}$ oranı yerine kinematik viskoziteye karşılık gelen ν terimi yazılır ve bu denklemde dış kuvvetler hesaba katılmazsa başka bir ifadeyle; $g_y = 0$ alınırsa;

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{2.88}$$

olarak iki-boyutlu, daimî ve sıkıştırılamaz akış problemleri için y-ekseni yönündeki Momentumun Korunumu Denklemi elde edilir.

Akışkanlar Mekaniği'nde genellikle Navier-Stokes Denklemleri'nin boyutsuz hâlleri kullanılır. Uzunluk boyutu L ve hız boyutu U alındığında;

$$x = \frac{x^*}{L}, y = \frac{y^*}{L}, u = \frac{u^*}{U}, v = \frac{v^*}{U}, P = \frac{P^*}{\rho U^2} \tag{2.89}$$

olarak ifade edilir [Kaykısızlı, 2006]. (2.86) ve (2.88) no.'lu denklemlerde u değişkeni yerine u^*, v değişkeni yerine v^*, x değişkeni yerine x^*, y değişkeni yerine y^* ve P değişkeni yerine P^* değişkenleri yazılarak bu denklemler tekrar düzenlenirse;

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \nu\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial {x^*}^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial {y^*}^2}\right) \tag{2.90}$$

$$u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \nu\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial {x^*}^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial {y^*}^2}\right) \tag{2.91}$$

olarak elde edilir.

x-ekseni yönündeki Momentumun Korunumu Denklemi'ni boyutsuzlaştırmak amacıyla (2.89) no.'lu denklemde yer alan boyutsuz formdaki eşitlikler, (2.90) no.'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$uU\frac{U}{L}\frac{\partial u}{\partial x} + vU\frac{U}{L}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\rho\frac{U^2}{L}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{U}{L^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{U}{L^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2.92}$$

olarak elde edilir. (2.92) no.'lu denklemde uygun sadeleştirmeler yapılırsa;

$$u\frac{U^2}{L}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{U^2}{L}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{U^2}{L}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\frac{U}{L^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2.93}$$

olarak elde edilir. (2.93) no.'lu denklemdeki bütün terimler $\frac{L}{U^2}$ ile çarpıldığında $\frac{U^2}{L}$ ifadeleri elimine edilir ve son olarak (2.94) no.'lu denklem elde edilir;

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\nu}{UL}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2.94}$$

y-ekseni yönündeki Momentumun Korunumu Denklemi'ni boyutsuzlaştırmak amacıyla (2.89) no.'lu denklemde boyutsuz formda yer alan eşitlikler, (2.91) no.'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$uU\frac{U}{L}\frac{\partial v}{\partial x}+vU\frac{U}{L}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\rho\frac{U^2}{L}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\frac{U}{L^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{U}{L^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{2.95}$$

olarak elde edilir. (2.95) no.'lu denklemde uygun sadeleştirmeleri yaparsak;

$$u\frac{U^2}{L}\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{U^2}{L}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{U^2}{L}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\frac{U}{L^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{2.96}$$

olarak elde edilir. (2.96) no.'lu denklemdeki bütün terimler $\frac{L}{U^2}$ ile çarpıldığında $\frac{U^2}{L}$ ifadeleri elimine edilir ve son olarak (2.97) no.'lu denklem elde edilir;

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\nu}{UL}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{2.97}$$

(2.94) ve (2.97) no.'lu denklemlerde yer alan $\frac{\nu}{UL}$ ifadesi, *Reynolds Sayısı* olarak tanımlanan boyutsuz büyüklük ile ifade edilir.

Reynolds Sayısı, akıştaki atalet kuvvetlerinin viskoz kuvvetlere oranı olup akışın yapısını belirleyen başka bir ifadeyle; akışı karakterize eden boyutsuz bir

büyüklüktür ve akışın laminer mi yoksa türbülanslı mı olduğunu belirtir. İncelenen iki farklı sistemde Reynolds Sayıları aynı ise akış alanı içerisindeki hız dağılımları aynıdır başka bir ifadeyle; dinamik benzerlik vardır. Reynolds Sayısı'ndaki karakteristik uzunluk olan L, akışın yapısına etki eden boyuttur [Halıcı ve Gündüz, 2001]. Bu tanıma göre Reynolds Sayısı;

$$Re = \frac{Atalet\ Kuvvetleri}{Viskoz\ Kuvvetler} \tag{2.98}$$

olarak ifade edilir ve Reynolds Sayısı, (2.99) no.'lu denklem ile hesaplanır [Halıcı ve Gündüz, 2001];

$$Re = \frac{UL}{\nu} \tag{2.99}$$

(2.99) no.'lu denklemde;

- U: Serbest akım hızı
- L: Karakteristik uzunluk
- ν: Kinematik viskozite

ifadelerine karşılık gelir.

(2.94) ve (2.97) no.'lu denklemlerde yer alan $\frac{\nu}{UL}$ ifadesi yerine $\frac{1}{Re}$ ifadesi yazılarak bu denklemler tekrar düzenlenirse;

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2.100}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{2.101}$$

olarak x-ekseni yönünde ve y-ekseni yönündeki Momentumun Korunumu Denklemleri'nin boyutsuz hâldeki son hâli elde edilir.

Bölüm 2.1.1.1.'de (2.23) no.'lu denklem olarak ifade edilen Süreklilik Denklemi ile birlikte (2.100) ve (2.101) no.'lu denklemler göz önüne alınırsa boyutsuz hâlde Navier-Stokes Denklem Sistemi aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2.102}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

3 farklı denklemden oluşan (2.102) no.'lu Navier-Stokes Denklem Sistemi'nde son 2 denklemde birtakım matematiksel işlemler sonrasında $\frac{\partial P}{\partial x}$ ve $\frac{\partial P}{\partial y}$ basınç terimleri elimine edilir ve bu denklemler tek denklem olarak ifade edilerek Navier-Stokes Denklem Sistemi'ndeki denklem sayısı 2'ye indirilmiş olur. Buna göre son 2 denklemde birtakım matematiksel işlemler yapıldıktan sonra son olarak (2.112) no.'lu denklem sistemi elde edilir. Yapılan matematiksel işlemler aşama aşama ifade edilmiştir. 1. aşamada (2.102) no.'lu denklem sistemindeki son 2 denklemden 1. denklemin y bağımsız değişkenine göre kısmî türevi alınırsa;

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right] \tag{2.103}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right) \tag{2.104}$$

olarak elde edilir ve bu denklemin sol tarafındaki 1. ve 3. terim $\frac{\partial u}{\partial y}$ ortak parantezine alınır ve ve buna göre denklem tekrar düzenlenirse;

$$\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right) \tag{2.105}$$

olarak elde edilir ve Süreklilik Denklemi'ne göre; $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ olduğundan dolayı (2.105) no.'lu denklemin sol tarafındaki 1. terim elimine olur ve buna göre denklem tekrar düzenlenirse son olarak (2.106) no.'lu denklem elde edilir;

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right) \tag{2.106}$$

2. aşamada (2.102) no.'lu denklem sistemindeki son 2 denklemden 2. denklemin x bağımsız değişkenine göre kısmî türevi alınırsa;

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right] \tag{2.107}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\right) \tag{2.108}$$

olarak elde edilir ve bu denklemin sol tarafındaki 1. ve 3. terim $\frac{\partial v}{\partial x}$ ortak parantezine alınır ve buna göre denklem tekrar düzenlenirse;

$$\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\right) \tag{2.109}$$

olarak elde edilir ve Süreklilik Denklemi'ne göre; $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ olduğundan dolayı (2.109) no.'lu denklemin sol tarafındaki 1. terim elimine olur ve buna göre denklem tekrar düzenlenirse son olarak (2.110) no.'lu denklem elde edilir;

$$u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\right) \tag{2.110}$$

3. aşamada ise (2.110) no.'lu denklem (2.106) no.'lu denklemden çıkarılarak (2.111) no.'lu denklem elde edilir;

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right) \tag{2.106}$$

$$u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\right) \tag{2.110}$$

$-$

$$u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}-\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}-\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\right) \tag{2.111}$$

(2.111) no.'lu denklemin ifade edilmesiyle birlikte (2.102) no.'lu denklem sistemindeki denklem sayısı 2'ye indirgenmiş olur ve son olarak iki-boyutlu, daimî ve sıkıştırılamaz akış problemleri için ifade edilen boyutsuzlaştırılmış Navier-Stokes Denklem Sistemi'nin son hâli aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}-\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}-\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\right) \tag{2.112}$$

2.2.2. Navier-Stokes Denklem Sisteminin Akım Fonksiyonu-Vortisite Yaklaşımı ile İki-Boyutlu Kartezyen Koordinat Sisteminde İfadesi

Bölüm 2.2.1.1.'de iki-boyutlu, daimî ve sıkıştırılamaz akış problemleri için boyutsuz hâlde ifade edilen (2.112) no.'lu Navier-Stokes Denklem Sistemi'nde bağımlı değişkenler hız bileşenleri (u ve v), bağımsız değişkenler ise x ve y değişkenleridir. Bu denklem sisteminde bilinmeyen sayısı kadar denklem olduğundan dolayı çözüm için yeterli denklem sayısı mevcuttur. Dolayısıyla bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşit olduğundan dolayı denklem sistemi çözülebilir; ancak denklem sistemindeki 2. denklem doğrusal olmayan kısmî türevli

diferansiyel denklem olduğundan dolayı bu denklemin çözümü oldukça karmaşıktır. (2.112) no.'lu denklem sistemindeki 2. denklemin hem doğrusal kısmî türevli diferansiyel denklem hâline dönüştürülmesi (dolayısıyla boyutsuz hâlde ifade edilen (2.112) no.'lu Navier-Stokes Denklem Sistemi'nin çözümünün kolaylaştırılması) hem de hesaplanması gereken bilinmeyen sayısının azaltılması amacıyla Akım Fonksiyonu-Vortisite (ψ-ω) dönüşümü kullanılır. Sonuç olarak boyutsuzlaştırılmış Navier-Stokes Denklem Sistemi, Akım Fonksiyonu-Vortisite (ψ-ω) formunda ifade edilir.

2.2.2.1. İki-Boyutlu Kartezyen Koordinat Sisteminde Eliptik Akım Fonksiyonu Denklemi

Vortisite (Çevrinti), bölüm 2.1.2.1.'de ifade edildiği üzere akışkan elemanının (parçacığının) açısal hızının iki katı büyüklüğünde vektörel bir büyüklük olarak tanımlanır ve literatürde iki-boyutlu kartezyen koordinat sisteminde Vortisite vektörü;

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.113}$$

olarak tanımlanır [Hoffman and Chiang, 2000]. (2.113) no.'lu denklemde,

- u: x-ekseni yönündeki hız bileşeni
- v: y-ekseni yönündeki hız bileşeni

ifadelerine karşılık gelmektedir.

Akış alanı içerisinde x- ve y-eksenleri yönündeki hız bileşenleri, literatürde Akım Fonksiyonu (ψ) olarak tanımlanan bir fonksiyon altında tanımlanır [Hoffmann and Chiang, 2000]. Buna göre; Akım Fonksiyonu'nun y bağımsız değişkenine göre 1. mertebeden kısmî türevi, x-ekseni yönündeki hız bileşeni olan u terimine karşılık gelmekte, Akım Fonksiyonu'nun x bağımsız değişkenine göre 1. mertebeden kısmî türevi ise y-ekseni yönündeki hız bileşeni olan v terimine karşılık gelmektedir. Bu tanıma göre x- ve y-eksenleri yönündeki hız bileşenleri sırasıyla;

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{2.114}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.115}$$

olarak ifade edilir. (2.114) ve (2.115) no.'lu denklemler, yukarıda ifade edilen (2.113) no.'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$\omega = \frac{\partial \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)}{\partial y} \tag{2.116}$$

$$\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tag{2.117}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \tag{2.118}$$

olarak fiziksel alandaki iki-boyutlu kartezyen koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; fiziksel alandaki x-y düzleminde Eliptik Akım Fonksiyonu Denklemi elde edilir.

Literatürde herhangi bir fiziksel büyüklüğün kartezyen koordinat sisteminde Laplace Denklemi;

$$\nabla^2(\dots) = \frac{\partial^2(\dots)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial z^2} \tag{2.119}$$

olarak ifade edilir.

Yukarıda ifade edilen (2.119) no.'lu denkleme göre Akım Fonksiyonu'na ait fiziksel alandaki iki-boyutlu kartezyen koordinat sisteminde Eliptik Laplace Denklemi;

$$\nabla^2 \psi = -\omega \tag{2.120}$$

olarak ifade edilir [Çengel ve Cimbala, 2007].

2.2.2.2. İki-Boyutlu Kartezyen Koordinat Sisteminde Eliptik Vortisite Denklemi

İki-boyutlu akış alanı içerisindeki hız bileşenlerinden x-ekseni yönündeki hız bileşenine karşılık gelen (2.114) no.'lu denklem ile y-ekseni yönündeki hız bileşenine karşılık gelen (2.115) no.'lu denklem, (2.111) no.'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}-\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}-\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}\right) \tag{2.121}$$

olarak elde edilir. (2.121) no.'lu denklem, birtakım matematiksel işlemler yapılarak yeniden düzenlenirse;

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)+\frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}+\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}-\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right) \tag{2.122}$$

olarak elde edilir. (2.122) no.'lu denklemin sol tarafındaki 1. terimde yer alan $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)$ ifadesi, bölüm 2.2.2.1.'de (2.113) no.'lu denklem olarak ifade edilen Vortisite vektörünün iki-boyutlu kartezyen koordinat sistemindeki ifadesinin x bağımsız değişkenine göre 1. mertebeden kısmî türevidir ve aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \tag{2.123}$$

(2.122) no.'lu denklemin sol tarafındaki 2. terimde yer alan $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ ifadesi, bölüm 2.2.2.1.'de (2.113) no.'lu denklem olarak ifade edilen Vortisite vektörünün

iki-boyutlu kartezyen koordinat sistemindeki ifadesinin y bağımsız değişkenine göre 1. mertebeden kısmî türevidir ve aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2.124}$$

(2.122) no.'lu denklemin sağ tarafında yer alan $\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)$ ifadesi, bölüm 2.2.2.1.'de ifade edilen (2.113) no.'lu denklemin x bağımsız değişkenine göre 2. mertebeden kısmî türevi ile y bağımsız değişkenine göre 2. mertebeden kısmî türevinin toplamı olup aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \tag{2.125}$$

(2.123), (2.124) ve (2.125) no.'lu denklemler, (2.122) no.'lu denklemde yerine yazılırsa fiziksel alandaki iki-boyutlu kartezyen koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; x-y düzleminde Eliptik Vortisite Denklemi aşağıdaki gibi elde edilir;

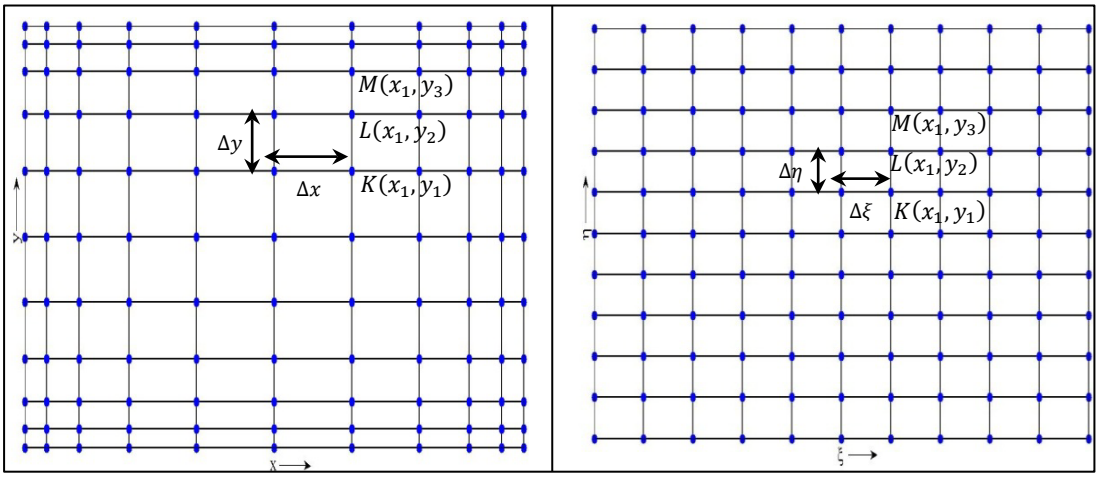
$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \tag{2.126}$$

Sonuç olarak boyutsuzlaştırılmış Navier-Stokes Denklem Sistemi, Akım Fonksiyonu-Vortisite (ψ-ω) formunda fiziksel alandaki iki-boyutlu kartezyen koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; x-y düzleminde aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= -\omega \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \end{aligned} \tag{2.127}$$

2.2.3. İki-Boyutlu Kartezyen Koordinat Sisteminde Fiziksel Alandan Hesaplama Alanına Transformasyon

Fiziksel alan, herhangi bir koordinat sisteminde alınan çözüm alanının belli sayıda noktalara bölünmesi sonucu oluşan ağ yapısında noktalar arası mesafenin eşit olmadığı başka bir ifadeyle; homojen olmayan ağ yapısının oluşturduğu çözüm alanı olarak tanımlanır. Hesaplama alanı ise eşit aralıklı ağ yapısının oluşturduğu çözüm alanı olarak tanımlanır. Şekil 2.6'da gösterilen fiziksel alanda x-ekseni yönünde herhangi iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe olan Δx değeri değişkendir, yani çözüm alanında göz önüne alınan farklı noktalar arasında farklı değerler almaktadır. y-ekseni yönünde herhangi iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe olan Δy değeri de benzer şekilde değişkendir ve Δx, Δy göz önüne alınan herhangi iki ağ yapısı noktası arasında birbirine eşit değildir, yani $\Delta x \neq \Delta y$'dir. Hesaplama alanında ise ξ-ekseni yönünde herhangi iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe olan $\Delta\xi$ değeri sabit özelliktedir, yani çözüm alanında göz önüne alınan farklı noktalar arasında aynı değerleri almaktadır. η-ekseni yönünde herhangi iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe olan $\Delta\eta$ değeri de benzer şekilde sabittir ve $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ değerleri göz önüne alınan herhangi iki ağ yapısı noktası arasında birbirine eşittir, yani $\Delta\xi = \Delta\eta$'dır. Fiziksel alan ve hesaplama alanı Şekil 2.6'da gösterilmiştir.



a) Fiziksel alan (Homojen olmayan ağ yapısı) b) Hesaplama alanı (Homojen ağ yapısı)

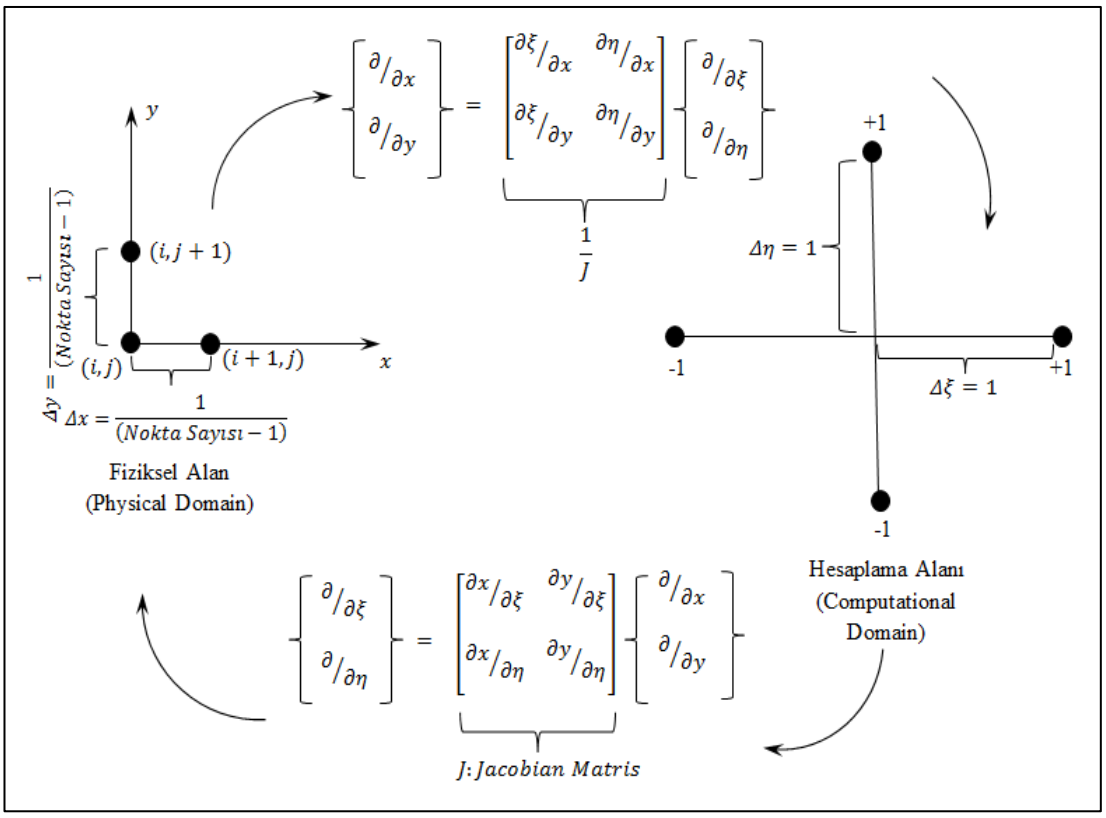
Şekil 2.6: Fiziksel alan (homojen olmayan ağ yapısı) ve hesaplama alanı (homojen ağ yapısı).

Fiziksel alandaki kartezyen koordinat sisteminde ifade edilen Akım Fonksiyonu ve Vortisite Denklemleri'nin hesaplama alanındaki kartezyen koordinat sisteminde ifade edilebilmesi için Jacobian Matris kullanılır. Jacoabian Matris, türevlerden oluşan katsayılar matrisi olarak tanımlanır. Jacobian Matris ve Jacobian Matris'in determinantı sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilir [Chung, 2010];

$$J = \begin{bmatrix} \partial x/\partial \xi & \partial x/\partial \eta \\ \partial y/\partial \xi & \partial y/\partial \eta \end{bmatrix} \tag{2.128}$$

$$det(J) = |J| = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{2.129}$$

Fiziksel alandan hesaplama alanına transformasyonun grafiksel anlatımı Şekil 2.7'de gösterilmiştir.



Şekil 2.7: Fiziksel alandan hesaplama alanına transformasyonun grafiksel gösterimi.

Herhangi bir fiziksel büyüklüğün 1. mertebeden kısmî türev ifadesinin fiziksel alandaki x-y koordinatlarından hesaplama alanındaki ξ-η koordinatlarına transformasyonu için sırasıyla;

$$\frac{\partial \ldots}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \ldots}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \ldots}{\partial \eta} \tag{2.130}$$

$$\frac{\partial \ldots}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \ldots}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \ldots}{\partial \eta} \tag{2.131}$$

eşitlikleri kullanılır [Chung, 2010].

Herhangi bir fiziksel büyüklüğün 1. mertebeden kısmî türev ifadesinin hesaplama alanındaki ξ-η koordinatlarından fiziksel alandaki x-y koordinatlarına transformasyonu için ise sırasıyla;

$$\frac{\partial \ldots}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial \ldots}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \ldots}{\partial y} \tag{2.132}$$

$$\frac{\partial \ldots}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial \ldots}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \ldots}{\partial y} \tag{2.133}$$

eşitlikleri kullanılır [Chung, 2010].

(2.130) ve (2.131) no.'lu denklemlerde yer alan $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \xi}{\partial y}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ ve $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ terimlerine karşılık gelen eşitlikler, (2.129) no.'lu denklemde ifade edilen Jacobian Matris'in determinantı kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilir [Erturk and Dursun, 2007];

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{|J|}\frac{\partial y}{\partial \eta} \tag{2.134}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{|J|}\frac{\partial x}{\partial \eta} \tag{2.135}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{|J|}\frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{2.136}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{|J|}\frac{\partial x}{\partial \xi} \tag{2.137}$$

(2.130) ve (2.131) no.'lu denklemlerin sırasıyla x ve y bağımsız değişkenlerine göre 2. mertebeden kısmî türevleri alınırsa herhangi bir fiziksel büyüklüğün 2. mertebeden kısmî türev ifadesinin fiziksel alandaki x-y koordinatlarından hesaplama alanındaki ξ-η koordinatlarına transformasyonunda kullanılan eşitlikler aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\frac{\partial^2 \dots}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \dots}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\frac{\partial \dots}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \dots}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\frac{\partial \dots}{\partial \eta} + 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial^2 \dots}{\partial \xi \partial \eta} \tag{2.138}$$

$$\frac{\partial^2 \dots}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \dots}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\frac{\partial \dots}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \dots}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\frac{\partial \dots}{\partial \eta} + 2\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial^2 \dots}{\partial \xi \partial \eta} \tag{2.139}$$

2.2.3.1. Transformasyon Fonksiyonları

İki-boyutlu kartezyen koordinat sisteminde ve fiziksel alanda başka bir ifadeyle; homojen olmayan ağ yapısından oluşan çözüm alanında elde edilen ve bölüm 2.2.1.'de ifade edilen Eliptik Akım Fonksiyonu ve Vortisite Denklemleri'nin hesaplama alanında başka bir ifadeyle; homojen ağ yapısından oluşan çözüm alanında ifade edilebilmesi için bu çalışmada kullanılan transformasyon fonksiyonları;

$$x = \xi - \frac{\lambda}{2\pi}\left(Sin(2\pi\xi)\right) \tag{2.140}$$

$$y = \eta - \frac{\lambda}{2\pi}\left(Sin(2\pi\eta)\right) \tag{2.141}$$

olarak dikkate alınmıştır [Erturk, 2009]. Aynı zamanda Akım Fonksiyonu ve Vortisite değerlerinin hesaplanacağı noktalar, bu fonksiyonların kullanılması ile elde edilen ağ yapısındaki noktalar olup bu noktalar üzerinde Akım Fonksiyonu ve Vortisite değerleri elde edilmeye çalışılmıştır. (2.140) ve (2.141) no.'lu denklemlerde;

- ξ: Hesaplama alanındaki x-ekseni
- η: Hesaplama alanındaki y-ekseni
- λ: Ağ yapısındaki noktalar arası mesafenin değişimini sağlayan parametre (*stretching parameter*)

olarak tanımlanır.

2.2.4. Hesaplama Alanındaki Kartezyen Koordinat Sisteminde (ξ-η Düzleminde) Hız Bileşenleri

2.2.4.1. Hesaplama Alanındaki Kartezyen Koordinat Sisteminde (ξ-η Düzleminde) ξ-Ekseni Yönündeki Hız Bileşeni

Fiziksel alandaki kartezyen koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; x-y düzleminde ifade edilen x-ekseni yönündeki hız bileşeninin hesaplama alanındaki kartezyen koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; ξ-η düzleminde ξ-ekseni yönündeki hız bileşenine eşiti olan ifadenin elde edilebilmesi için herhangi bir kısmî türev ifadesinin farklı bir bağımsız değişken cinsinden ifade edilmesini sağlayan matematiksel işlem olan zincir kuralı uygulanır. Sayısal Analiz literatüründe zincir kuralı, bileşik fonksiyon veya fonksiyon fonksiyonu olarak tanımlanan fonksiyonlara uygulanır.

İki-boyutlu akış alanı içerisindeki hız bileşenlerinden x-ekseni yönündeki hız bileşenine karşılık gelen (2.114) no.'lu denklemin ξ-η düzleminde ifade edilebilmesi için denklemde yer alan Akım Fonksiyonu'nun y bağımsız değişkenine göre kısmî türev ifadesinin ξ-η düzleminde ifade edilmesi gerekir. Buna göre Akım Fonksiyonu'nun y bağımsız değişkenine göre kısmî türev ifadesinin ξ-η düzleminde ifade edilebilmesi için zincir kuralı uygulanır. Bu işlemlerin sonucu olarak x-y

düzleminde göz önüne alınan x-ekseni yönündeki hız bileşeninin ξ-η düzleminde ξ-ekseni yönündeki hız bileşenine eşiti olan ifade elde edilir.

İlerleyen bölümlerde karşımıza çıkacak olan Vortisite'nin x bağımsız değişkenine göre 1. ve 2. mertebeden kısmî türev ifadelerinin ξ-η düzleminde ifadeleri de bu bölümde elde edilmeye çalışılacaktır.

Buna göre Akım Fonksiyonu'nun y bağımsız değişkenine göre, Vortisite'nin x bağımsız değişkenine göre 1. mertebeden kısmî türev ifadeleri için zincir kuralı uygulanarak 1. mertebeden kısmî türev ifadelerinin ξ-η düzleminde ifadeleri sırasıyla;

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \tag{2.142}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \tag{2.143}$$

olarak elde edilir.

Akım Fonksiyonu'nun y bağımsız değişkenine göre, Vortisite'nin x bağımsız değişkenine göre 2. mertebeden kısmî türev ifadeleri için zincir kuralı uygulanarak 2. mertebeden kısmî türev ifadelerinin ξ-η düzleminde ifadeleri sırasıyla;

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\frac{\partial \psi}{\partial \eta} + 2\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \tag{2.144}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\frac{\partial \omega}{\partial \eta} + 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} \tag{2.145}$$

olarak elde edilir.

İki-boyutlu akış alanı içerisindeki hız bileşenlerinden x-ekseni yönündeki hız bileşenine karşılık gelen (2.114) no.'lu denklemde, Akım Fonksiyonu'nun y bağımsız değişkenine göre 1. mertebeden kısmî türev ifadesine eşit olan ve ξ-η düzleminde ifade edilen (2.142) no.'lu denklem yerine yazılırsa;

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \tag{2.146}$$

olarak ξ-η düzleminde ξ-ekseni yönündeki hız bileşenine eşit olan ifade elde edilir.

2.2.4.2. Hesaplama Alanındaki Kartezyen Koordinat Sisteminde (ξ-η Düzleminde) η-Ekseni Yönündeki Hız Bileşeni

Fiziksel alandaki kartezyen koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; x-y düzleminde ifade edilen y-ekseni yönündeki hız bileşeninin hesaplama alanındaki kartezyen koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; ξ-η düzleminde η-ekseni yönündeki hız bileşenine eşiti olan ifadenin elde edilebilmesi için herhangi bir kısmî türev ifadesinin farklı bir bağımsız değişken cinsinden ifade edilmesini sağlayan matematiksel işlem olan zincir kuralı uygulanır. Sayısal Analiz literatüründe zincir kuralı, bileşik fonksiyon veya fonksiyon fonksiyonu olarak tanımlanan fonksiyonlara uygulanır.

İki-boyutlu akış alanı içerisindeki hız bileşenlerinden y-ekseni yönündeki hız bileşenine karşılık gelen (2.115) no.'lu denklemin ξ-η düzleminde ifade edilebilmesi için denklemde yer alan Akım Fonksiyonu'nun x bağımsız değişkenine göre kısmî türev ifadesinin ξ-η düzleminde ifade edilmesi gerekir. Buna göre Akım Fonksiyonu'nun x bağımsız değişkenine göre kısmî türev ifadesinin ξ-η düzleminde ifade edilebilmesi için zincir kuralı uygulanır. Bu işlemlerin sonucu olarak x-y düzleminde göz önüne alınan y-ekseni yönündeki hız bileşeninin ξ-η düzleminde η-ekseni yönündeki hız bileşenine eşiti olan ifade elde edilir.

İlerleyen bölümlerde karşımıza çıkacak olan Vortisite'nin y bağımsız değişkenine göre 1. ve 2. mertebeden kısmî türev ifadelerinin ξ-η düzleminde ifadeleri de bu bölümde elde edilmeye çalışılacaktır.

Akım Fonksiyonu'nun x bağımsız değişkenine göre, Vortisite'nin y bağımsız değişkenine göre 1. mertebeden kısmî türev ifadeleri için zincir kuralı uygulanarak 1. mertebeden kısmî türev ifadelerinin ξ-η düzleminde ifadeleri sırasıyla;

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \tag{2.147}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \tag{2.148}$$

olarak elde edilir.

Akım Fonksiyonu'nun x bağımsız değişkenine göre, Vortisite'nin y bağımsız değişkenine göre 2. mertebeden kısmî türev ifadeleri için zincir kuralı uygulanarak 2. mertebeden kısmî türev ifadelerinin ξ-η düzleminde ifadeleri sırasıyla;

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\frac{\partial \psi}{\partial \eta} + 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \tag{2.149}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\frac{\partial \omega}{\partial \eta} + 2\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} \tag{2.150}$$

olarak elde edilir.

İki-boyutlu akış alanı içerisindeki hız bileşenlerinden y-ekseni yönündeki hız bileşenine karşılık gelen (2.115) no.'lu denklemde, Akım Fonksiyonu'nun x bağımsız değişkenine göre 1. mertebeden kısmî türev ifadesine eşit olan ve ξ-η düzleminde ifade edilen (2.147) no.'lu denklem yerine yazılırsa;

$$v = -\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) \tag{2.151}$$

olarak ξ-η düzleminde η-ekseni yönündeki hız bileşenine eşit olan ifade elde edilir.

2.2.5. Navier-Stokes Denklem Sisteminin Akım Fonksiyonu-Vortisite Yaklaşımı ile Hesaplama Alanındaki Kartezyen Koordinat Sisteminde (ξ-η Düzleminde) İfadesi

Bölüm 2.2.2.2.'de (2.127) no.'lu denklem olarak ifade edilen boyutsuzlaştırılmış Navier-Stokes Denklem Sistemi, Akım Fonksiyonu-Vortisite (ψ-ω) formunda fiziksel alandaki iki-boyutlu kartezyen koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; x-y düzleminde hatırlanacağı üzere;

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\omega$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right) \quad (2.127)$$

olarak ifade edilmiştir. Bu denklem sisteminde yer alan $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$ terimlerine hesaplama alanındaki iki-boyutlu kartezyen koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; ξ-η düzlemindeki karşılık gelen ifadeler, bölüm 2.2.4.1. ve bölüm 2.2.4.2.'de sırasıyla (2.142), (2.143), (2.144), (2.145), (2.147), (2.148), (2.149) ve (2.150) no.'lu denklemler olarak ifade edilmiştir. Bu denklemler, yukarıda ifade edilen (2.127) no.'lu denklemde yerine yazılır ve gerekli matematiksel işlemler ve düzenlemeler yapılırsa Akım Fonksiyonu-Vortisite (ψ-ω) formunda ve hesaplama alanındaki iki-boyutlu kartezyen koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; ξ-η düzleminde boyutsuzlaştırılmış Navier-Stokes Denklem Sistemi elde edilir.

2.2.5.1. Akım Fonksiyonu Denkleminin Hesaplama Alanındaki Kartezyen Koordinat Sisteminde (ξ-η Düzleminde) İfadesi

Bölüm 2.2.4.1.'de ifade edilen (2.144) no.'lu denklem ile bölüm 2.2.4.2.'de ifade edilen (2.149) no.'lu denklem, x-y düzleminde elde edilen ve bölüm 2.2.1.1.'de ifade edilen (2.118) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi'nde yerine yazılırsa Akım Fonksiyonu Denklemi'nin ξ-η düzleminde ifadesi elde edilir. Buna göre gerekli matematiksel işlemler ve düzenlemeler yapılırsa;

$$\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+2\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}\right)$$
$$+\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+2\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}\right) \quad (2.152)$$
$$=-\omega$$

$$\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}+\left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}+\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$
$$+\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right)\frac{\partial \psi}{\partial \eta}+2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta}=-\omega \tag{2.153}$$

(2.153) no.'lu denklemde;

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}=0 \tag{2.154}$$

olduğundan dolayı (2.153) no.'lu denklemin sol tarafındaki son terim olan çapraz türev ifadelerinin bulunduğu terim 0'a eşit olur [Kaykısızlı, 2006]. Çapraz türev ifadeleri, türev ifadesi içerisinde her iki bağımsız değişkeni de içeren türev ifadeleridir [Spiegel and Liu, 1999]. Başka bir ifadeyle; çapraz türev ifadeleri, birden çok bağımsız değişkene göre türevleri içeren minimum 2. mertebeden türev ifadeleridir.

Yukarıda da ifade edildiği üzere (2.154) no.'lu denklemin değeri 0'a eşit olduğundan dolayı (2.153) no.'lu denklemin sol tarafındaki son terim sıfır (0) alınır ve sonuç olarak elde edilen (2.155) no.'lu denklem, çapraz türev ifadeleri içermez. Buna göre Akım Fonksiyonu Denklemi'nin ξ-η düzleminde ifadesi;

$$\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}+\left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}$$
$$+\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial \psi}{\partial \xi}+\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right)\frac{\partial \psi}{\partial \eta}=-\omega \tag{2.155}$$

olarak elde edilir. (2.155) no.'lu denklemde, A, B, C ve D olarak gösterilen sabit toplamlar tanımlanır;

$$A=\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right) \tag{2.156}$$

$$B = \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right) \tag{2.157}$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) \tag{2.158}$$

$$D = \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) \tag{2.159}$$

A, B, C ve D olarak gösterilen sabit toplamların kullanımı ile birlikte iki-boyutlu, daimî ve sıkıştırılamaz akış problemleri için x-y düzleminde ifade edilen Akım Fonksiyonu Denklemi, koordinat transformasyonu ile ξ-η düzleminde aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$A\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + B\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + C\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + D\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -\omega \tag{2.160}$$

(2.160) no.'lu denklem, bölüm 2.2.2.1.'de (2.118) no.'lu denklem olarak ifade edilen x-y düzlemindeki Akım Fonksiyonu Denklemi'nin ξ-η düzlemindeki ifadesidir.

2.2.5.2. Vortisite Denkleminin Hesaplama Alanındaki Kartezyen Koordinat Sisteminde (ξ-η Düzleminde) İfadesi

Bölüm 2.2.4.1.'de ifade edilen (2.142), (2.143) ve (2.145) no.'lu denklemler ile bölüm 2.2.4.2.'de ifade edilen (2.147), (2.148) ve (2.150) no.'lu denklemler, x-y düzleminde elde edilen ve bölüm 2.2.2.2.'de ifade edilen (2.126) no.'lu Vortisite Denklemi'nde yerine yazılırsa Vortisite Denklemi'nin ξ-η düzleminde ifadesi elde edilir. Buna göre gerekli matematiksel işlemler ve düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{1}{Re}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+2\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+2\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}\right]$$
$$=\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)$$
$$-\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right) \tag{2.161}$$

$$\frac{1}{Re}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+\frac{1}{Re}\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}$$
$$+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\eta}$$
$$+\frac{2}{Re}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}=\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)$$
$$-\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right) \tag{2.162}$$

$$\frac{1}{Re}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+\frac{1}{Re}\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}$$
$$+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\eta}$$
$$+\frac{2}{Re}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}=\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)$$
$$-\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)$$
$$-\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right) \tag{2.163}$$

$$\frac{1}{Re}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+\frac{1}{Re}\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}$$
$$+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\eta}$$
$$+\frac{2}{Re}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}$$
$$-\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial\xi} \quad (2.164)$$

(2.164) no.'lu denklemde;

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}=0 \quad (2.165)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}=0 \quad (2.166)$$

olduğundan dolayı (2.164) no.'lu denklemin sol tarafındaki son terim olan çapraz türev ifadesinin bulunduğu terim ile denklemin sağ tarafındaki ilk terim ve son terimin değerleri sıfır (0) alınırsa;

$$\frac{1}{Re}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+\frac{1}{Re}\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}$$
$$+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\eta}$$
$$=\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial\eta} \quad (2.167)$$

olarak Vortisite Denklemi'nin ξ-η düzlemindeki ifadesi elde edilir.

Yukarıda elde edilen (2.167) no.'lu denklem incelendiğinde; denklemdeki sabit toplamların bölüm 2.2.5.1.'de ifade edilen ξ-η düzlemindeki (2.155) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi'nde kullanılan sabit toplamlara eşit olduğu görülür. Dolayısıyla bölüm 2.2.5.1.'de ifade edilen A, B, C, D sabit toplamları kullanılmak üzere ek olarak E sabit toplamı tanımlanır ve A, B, C, D sabit toplamları tekrar numaralandırılır;

$$A = \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right) \tag{2.168}$$

$$B = \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right) \tag{2.169}$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) \tag{2.170}$$

$$D = \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) \tag{2.171}$$

$$E = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{2.172}$$

A, B, C, D ve E olarak gösterilen sabit toplamların kullanımı ile birlikte iki-boyutlu, daimî ve sıkıştırılamaz akış problemleri için x-y düzleminde ifade edilen Vortisite Denklemi, koordinat transformasyonu ile ξ-η düzleminde aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\frac{1}{Re}A\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{1}{Re}B\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{1}{Re}C\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{1}{Re}D\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = E\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \omega}{\partial \xi} - E\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \tag{2.173}$$

$$\frac{1}{Re}\left(A\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + B\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + C\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + D\frac{\partial \omega}{\partial \eta}\right) = E\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial \omega}{\partial \eta}\right) \tag{2.174}$$

(2.174) no.'lu denklem, bölüm 2.2.2.2.'de (2.126) no.'lu denklem olarak ifade edilen x-y düzlemindeki Vortisite Denklemi'nin ξ-η düzlemindeki ifadesidir.

Sonuç olarak boyutsuzlaştırılmış Navier-Stokes Denklem Sistemi, Akım Fonksiyonu-Vortisite (ψ-ω) formunda hesaplama alanındaki iki-boyutlu kartezyen koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; ξ-η düzleminde aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$A\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+B\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+C\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+D\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=-\omega$$

$$\frac{1}{Re}\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+B\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}+C\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+D\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)=E\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}-\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right) \quad (2.175)$$

2.2.6. Akım Fonksiyonu ve Vortisite Denklemlerinin Ayrıklaştırılmasında Uygulanan Nümerik Çözüm Yöntemi

2.2.6.1. Sonlu Farklar Yöntemi

Kısmî türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde değişik metotlar kullanılır. Bu metotlar arasında en eski ve açık metot Sonlu Farklar Metodu'dur. Sonlu Farklar Metodu'nda sürekli çözüm alanı ayrıklaştırılarak (diskretize edilerek) başka bir ifadeyle; çözüm alanı belirli aralıklarda noktalarla temsil edilerek bağımlı değişkenin sadece bu noktalardaki değeri bulunmaya çalışılır. Kısmî türev ifadelerinin yaklaşık olarak sonlu farklarla ifade edilmesi, verilen kısmî türevli diferansiyel denklemin cebirsel bir denklem veya denklem sistemi olan sonlu fark denklemlerine dönüşmesini sağlar. Sonuçta elde edilen cebirsel sistem, orijinal kısmî türevli diferansiyel denklemin karakterine bağlı olur [Karagöz, 2001].

Sonlu Farklar Metodu'nun temeli, kısmî türevli diferansiyel denklemlerde görülen kısmî türev ifadelerinin sonlu ve ayrık noktalarda yaklaşık olarak ifade edilmesi üzerine kuruludur [Karagöz, 2001].

Herhangi bir kısmî türevin sonlu farklarla ifadesinin temelini türev tanımı oluşturur [Karagöz, 2001].

Herhangi bir $f(x,y)$ fonksiyonunun x bağımsız değişkenine göre (x_i, y_j) noktasındaki türevi;

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_i+\Delta x,\ y_j)-f(x_i,y_j)}{\Delta x}=\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta x}+hata \quad (2.176)$$

olarak ifade edilir [Karagöz, 2001]. (2.176) no.'lu denklemin sağ kısmı, türevin sonlu farklarla gösterimidir. Sonlu fark gösterimindeki hata, limitin kaldırılmasıyla oluşan hata olup bu hatanın mertebesi bu çalışmada 4. mertebe olarak dikkate alınmıştır ve

hata mertebesi $\vartheta(\Delta x^4)$ sembolü ile gösterilmiştir; ama Δx terimi, dikkate alınan denklemde yer alan bağımsız değişkene göre değişmektedir. Örneğin; denklemde yer alan bağımsız değişken ξ ise hata mertebesi $\vartheta(\Delta \xi^4)$ sembolü ile gösterilir.

Sonlu fark gösterimi daha formel bir temele oturtulabilir. Bu amaçla sonlu fark ifadelerinin oluşturulmasında;

i) Taylor Serisi Açılımı
ii) Polinom Uydurma
iii) İntegral Metodu
iv) Sonlu Hacim Yaklaşımı

yöntemleri kullanılır. Çoğu zaman yukarıda ifade edilen bu dört yöntemle aynı sonlu fark denklemleri elde edilir. Bu 4 yöntem arasından Polinom Uydurma Yöntemi, daha çok sınır şartlarının tatbikinde uygulanır [Karagöz, 2001].

Bu çalışmada yukarıda ifade edilen bu 4 yöntem arasından 1. yöntem olan Taylor Serisi Açılımı kullanılarak kısmî türev ifadelerinin sonlu fark ifadeleri elde edilecek ve hata analizleri yapılacaktır.

Taylor Serisi Açılımı Metodu ile gerekli aritmetik işlemler yapılarak akış alanı içerisinde göz önüne alınan herhangi bir nokta için hız, basınç ve dikkate alınan problemde bulunması isteniyorsa ivme vb. değerlerin istenilen türev mertebesinde ve istenilen kesme hatası (truncation error) mertebesinde sonlu fark ve iteratif çözüm denklemleri elde edilebildiğinden dolayı bu çalışmada Taylor Serisi Açılımı Metodu tercih edilmiştir. Taylor Serisi, bir noktadaki değeri ve o noktadaki türevlerinin değeri bilinen bir fonksiyonun başka bir noktadaki değerini ifade eder [Chapra and Canale, 2010].

2.2.6.2. Taylor Serisi Açılımı ile Sonlu Fark Formülleri

Sonlu Fark Metodu'nda 1. ve 2. türev mertebesinden kısmî türev ifadelerinin Taylor Serisi açılımlarından faydalanılarak herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonunun dik koordinat sistemindeki (analitik düzlemdeki) x_{i+1} ve x_{i-1} noktalarına göre Taylor Serisi açılımları sırasıyla;

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i)\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^4}{4!}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^5}{5!}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + \cdots + \frac{(x_{i+1} - x_i)^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + R_n \quad (2.177)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - (x_{i+1} - x_i)\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} - \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^4}{4!}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} - \frac{(x_{i+1} - x_i)^5}{5!}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + \cdots + \frac{(x_{i+1} - x_i)^n}{n!}\frac{\partial^n f(x_i)}{\partial x^n} - R_n \quad (2.178)$$

olarak ifade edilir [Chapra and Canale, 2010]. (2.177) ve (2.178) no.'lu denklemlerde $(x_{i+1} - x_i)$ terimi yerine $\Delta x = (x_{i+1} - x_i)$ terimi yazılarak yeniden düzenlenirse;

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \Delta x\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} + \frac{\Delta x^5}{5!}\frac{\partial^5 f(x_i)}{\partial x^5} + \cdots + \frac{\Delta x^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + R_n \quad (2.179)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - \Delta x\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} - \frac{\Delta x^5}{5!}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + \cdots + \frac{\Delta x^n}{n!}\frac{\partial^n f(x_i)}{\partial x^n} - R_n \quad (2.180)$$

olarak ifade edilir. (2.179) ve (2.180) no.'lu Taylor Serisi açılımlarındaki R_n terimi, seri içerisindeki artan terimi ifade etmektedir ve bu ifadenin karşılığı;

$$R_n = \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1} f(\xi)}{\partial x^{n+1}} \quad (2.181)$$

olarak ifade edilir [Chapra and Canale, 2010].

Taylor Serisi açılımlarındaki artan terimleri ifade eden R_n teriminin karşılığı olan (2.181) no.'lu denklemde yer alan ξ değeri, x_{i+1} noktası ile x_i noktası arasında yer alan herhangi bir değişken noktayı ifade etmektedir [Chapra and Canale, 2010].

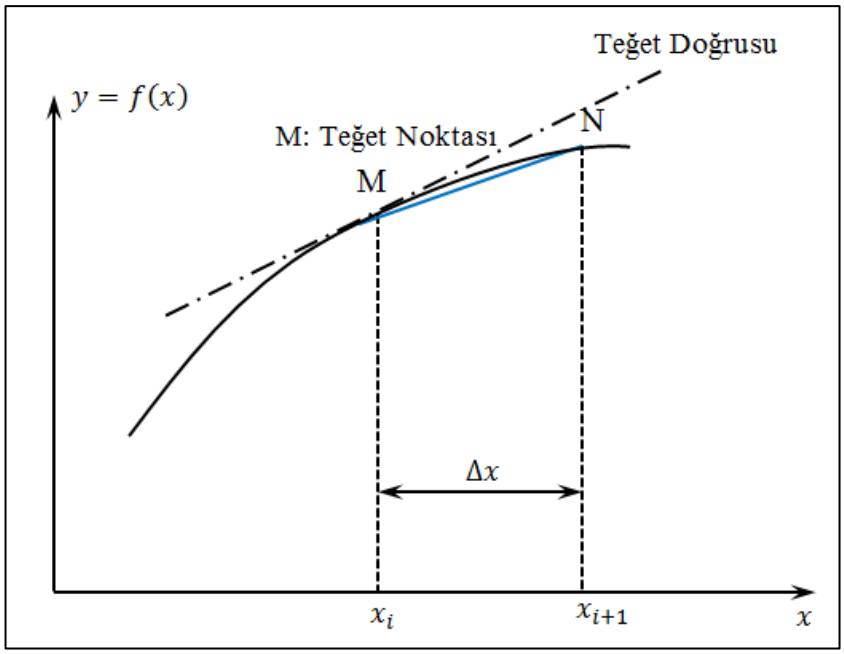
Taylor Serisi Açılımı ile Sonlu Farklar Yöntemi'nde herhangi bir mertebeden kısmî türev ifadesi ($\frac{\partial f}{\partial x}$,$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$,..., $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$), 3 farklı yaklaşım kullanılarak sonlu fark denklemi olarak ifade edilir. Bu yaklaşımlar;

i) İleri Sonlu Fark Yaklaşımı
ii) Geri Sonlu Fark Yaklaşımı
iii) Merkezî Sonlu Fark Yaklaşımı

olarak adlandırılır.

2.2.6.2.1. İleri Sonlu Fark Yaklaşımı

Bu yaklaşımda herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonu dikkate alınıp bu fonksiyonun Şekil 2.8'de gösterildiği gibi x_i ve x_{i+1} noktaları alınır ve x_{i+1} noktasındaki değeri Taylor Serisi ile ifade edilir. Taylor Serisi ile ifade edilen denklemde yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edilerek 3. terimden sonra seri kesilir. 3. terimden sonra seri kesildiğinden dolayı elde edilen denklem belli bir hata payı içerir ve bu hata literatürde kesme hatası (*truncation error*) olarak tanımlanır [Chapra and Canale, 2010]. 3. terimden sonraki terimler ihmal edilerek elde edilen denklemde 1. mertebeden türev ifadesi çekilerek 1. mertebeden türev ifadesinin sonlu fark denklemi elde edilir. Bu denklem literatürde ileri sonlu fark türev formülü olarak tanımlanır ve belli bir kesme hatası ile ifade edilir [Chapra and Canale 2010]. Şekil 2.8'de gösterildiği gibi $y = f(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki türevi, eğrinin o noktadaki teğet doğrusunun eğimi olduğuna göre bu eğim değerine eşit olan ifade, belli bir hata mertebesi ile MN kirişinin eğimini veren ileri sonlu fark türev formülüdür.



Şekil 2.8: İleri sonlu fark türev formülünün grafiksel gösterimi.

Taylor Serisi açılımı ile ifade edilen $y = f(x)$ fonksiyonunun x_{i+1} noktasındaki değeri olan (2.179) no.'lu denklemde yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edilerek 3. terimden sonra seri kesilirse;

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} \tag{2.182}$$

olarak elde edilir. (2.182) no.'lu denklemden 1. mertebeden türev ifadesi çekilerek x_i noktasına göre 1. hata mertebesinden hassasiyet ile ileri sonlu fark türev formülü elde edilir;

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} \tag{2.183}$$

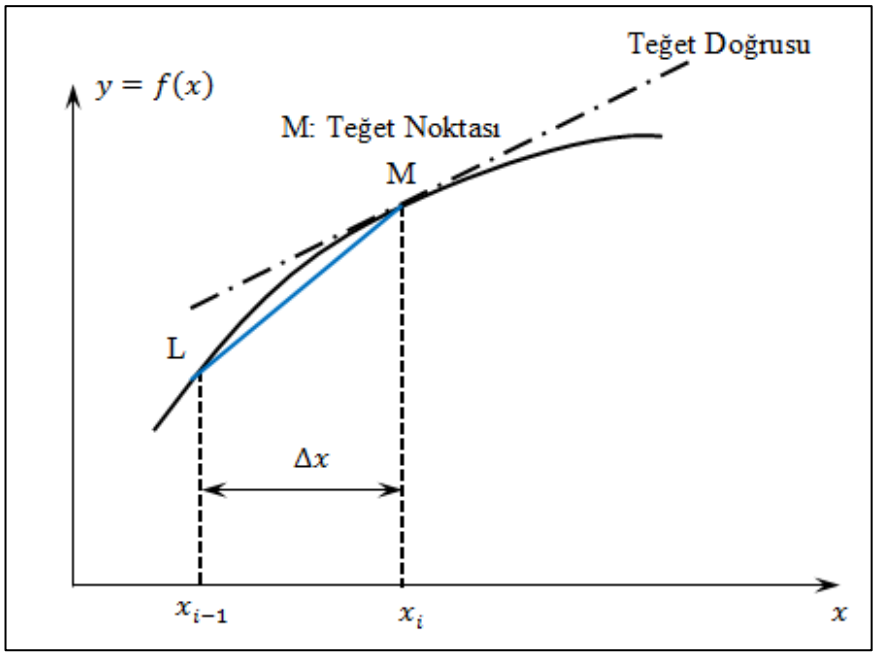
(2.183) no.'lu denklemin sağ tarafında yer alan 2. terim, kesme hatası değeridir. Bu değerde yer alan Δx çarpanı hatanın büyüklüğünden çok ne mertebede olduğunu göstermektedir ve bu mertebe değeri aynı zamanda yazılan türev ifadesinin ne mertebede hassas olduğunu göstermektedir [Karagöz, 2001]. Kesme hatası değeri yerine hata mertebesi göz önüne alınır ve bu hata mertebesi $\vartheta(\Delta x)$ sembolü ile gösterilirse denklem daha sade bir hâle dönüşür;

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} + \vartheta(\Delta x) \tag{2.184}$$

olarak 1. mertebeden türev ifadesinin 1. hata mertebesinden hassasiyetle ileri sonlu fark türev formülü elde edilir.

2.2.6.2.2. Geri Sonlu Fark Yaklaşımı

Bu yaklaşımda herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonu dikkate alınıp bu fonksiyonun Şekil 2.9'da gösterildiği gibi x_{i-1} ve x_i noktaları alınır ve x_{i-1} noktasındaki değeri Taylor Serisi ile ifade edilir. Taylor Serisi ile ifade edilen denklemde yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edilerek 3. terimden sonra seri kesilir. 3. terimden sonra seri kesildiğinden dolayı elde edilen denklem belli bir hata payı içerir ve bu hata literatürde kesme hatası (*truncation error*) olarak tanımlanır [Chapra and Canale, 2010]. 3. terimden sonraki terimler ihmal edilerek elde edilen denklemde 1. mertebeden türev ifadesi çekilerek 1. mertebeden türev ifadesinin sonlu fark denklemi elde edilir. Bu denklem literatürde geri sonlu fark türev formülü olarak tanımlanır ve belli bir kesme hatası ile ifade edilir [Chapra and Canale 2010]. Şekil 2.9'da gösterildiği gibi $y = f(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki türevi, eğrinin o noktadaki teğet doğrusunun eğimi olduğuna göre bu eğim değerine eşit olan ifade, belli bir hata mertebesi ile LM kirişinin eğimini veren geri sonlu fark türev formülüdür.



Şekil 2.9: Geri sonlu fark türev formülünün grafiksel gösterimi.

Taylor Serisi açılımı ile ifade edilen $y = f(x)$ fonksiyonunun x_{i-1} noktasındaki değeri olan (2.180) no.'lu denklemde yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edilerek 3. terimden sonra seri kesilirse;

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - \Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} \tag{2.185}$$

(2.185) no.'lu denklemden 1. mertebeden türev ifadesi çekilerek x_i noktasına göre 1. hata mertebesinden hassasiyet ile geri sonlu fark türev formülü elde edilir;

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} \tag{2.186}$$

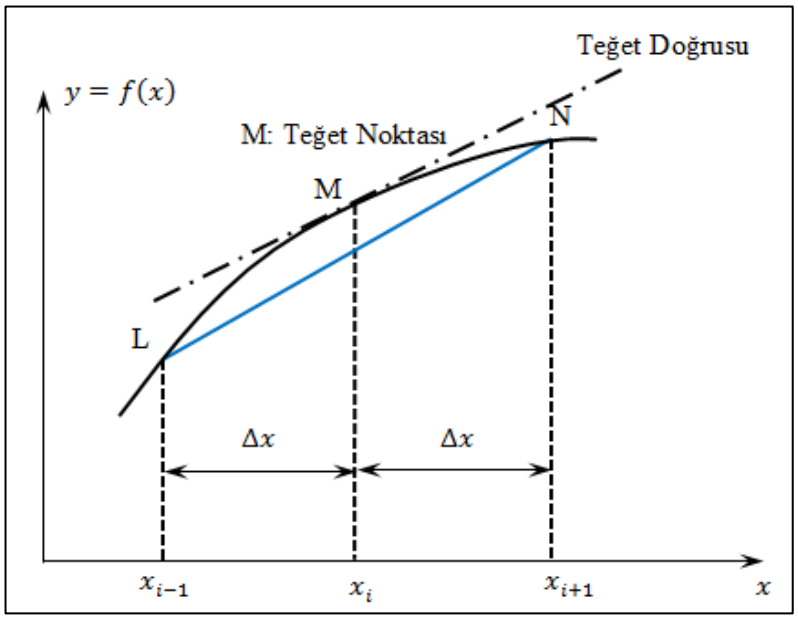
(2.186) no.'lu denklemin sağ tarafında yer alan 2. terim, kesme hatası değeridir. Kesme hatası değeri yerine hata mertebesi göz önüne alınır ve bu hata mertebesi $\vartheta(\Delta x)$ sembolü ile gösterilirse denklem daha sade bir hâle dönüşür;

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} + \vartheta(\Delta x) \tag{2.187}$$

olarak 1. mertebeden türev ifadesinin 1. hata mertebesinden hassasiyetle geri sonlu fark türev formülü elde edilir.

2.2.6.2.3. Merkezî Sonlu Fark Yaklaşımı

Bu yaklaşımda herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonu dikkate alınıp bu fonksiyonun Şekil 2.10'da gösterildiği gibi x_{i-1}, x_i ve x_{i+1} noktaları alınarak x_{i+1} ve x_{i-1} noktalarındaki değeri Taylor Serisi ile ifade edilir. Taylor Serisi ile ifade edilen denklemlerde yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edilerek 4. terimden sonra seri kesilir. 4. terimden sonra seri kesildiğinden dolayı elde edilen denklem belli bir hata payı içerir ve bu hata literatürde kesme hatası (*truncation error*) olarak tanımlanır [Chapra and Canale, 2010]. $y = f(x)$ fonksiyonunun x_{i+1} noktasına göre açılan Taylor Serisi açılımından x_{i-1} noktasına göre açılan Taylor Serisi açılımı çıkarılır ve elde edilen denklemden 1. mertebeden türev ifadesi çekilerek 1. mertebeden türev ifadesinin sonlu fark denklemi elde edilir. Bu denklem literatürde merkezî sonlu fark türev formülü olarak tanımlanır ve belli bir kesme hatası ile ifade edilir [Chapra and Canale, 2010]. Şekil 2.10'da gösterildiği gibi $y = f(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki türevi, eğrinin o noktadaki teğet doğrusunun eğimi olduğuna göre bu eğim değerine eşit olan ifade, belli bir hata mertebesi ile LN kirişinin eğimini veren merkezî sonlu fark türev formülüdür.



Şekil 2.10: Merkezî sonlu fark türev formülünün grafiksel gösterimi.

Taylor Serisi açılımı ile ifade edilen $y = f(x)$ fonksiyonunun x_{i+1} noktasındaki değeri olan (2.179) no.'lu denklemde yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edilerek 4. terimden sonra seri kesilirse;

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} \tag{2.188}$$

olarak elde edilir.

Taylor Serisi açılımı ile ifade edilen $y = f(x)$ fonksiyonunun x_{i-1} noktasındaki değeri olan (2.180) no.'lu denklemde yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edilerek 4. terimden sonra seri kesilirse;

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - \Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} \tag{2.189}$$

olarak elde edilir. (2.189) no.'lu denklem (2.188) no.'lu denklemden çıkarılarak (2.190) no.'lu denklem elde edilir;

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2\Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{3} \frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} \tag{2.190}$$

(2.190) no.'lu denklemden 1. mertebeden türev ifadesi çekilerek x_i noktasına göre 1. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülü elde edilir;

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{3} \frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} \tag{2.191}$$

(2.191) no.'lu denklemin sağ tarafında yer alan 2. terim, kesme hatası değeridir. Kesme hatası değeri yerine hata mertebesi göz önüne alınır ve bu hata mertebesi $\vartheta(\Delta x^2)$ sembolü ile gösterilirse denklem daha sade bir hâle dönüşür;

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} + \vartheta(\Delta x^2) \tag{2.192}$$

olarak 1. mertebeden türev ifadesinin 2. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülü elde edilir.

$y = f(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki 2. mertebeden merkezî sonlu fark türev formülünün elde edilebilmesi için aşağıda ifade edilen (2.193) ve (2.194) no.'lu denklemler taraf tarafa toplanırsa;

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (\Delta x)\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{6}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{24}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} \tag{2.193}$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - \Delta x\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{6}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{24}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} \tag{2.194}$$

$+$

$$f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) = 2f(x_i) + \Delta x^2\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^4}{12}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} \tag{2.195}$$

olarak elde edilir. (2.195) no.'lu denklemden 2. mertebeden türev ifadesi çekilerek x_i noktasına göre 2. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülü elde edilir;

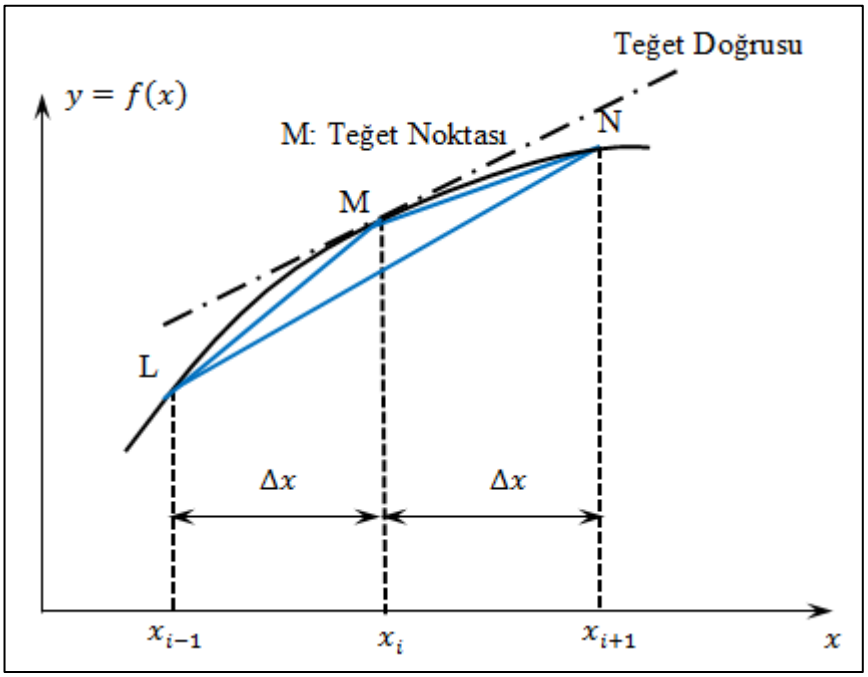
$$\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} \tag{2.196}$$

(2.196) no.'lu denklemin sağ tarafında yer alan 2. terim, kesme hatası değeridir. Kesme hatası değeri yerine hata mertebesi göz önüne alınır ve bu hata mertebesi $\vartheta(\Delta x^2)$ sembolü ile gösterilirse denklem daha sade bir hâle dönüşür;

$$\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{\Delta x^2} + \vartheta(\Delta x^2) \tag{2.197}$$

olarak 2. mertebeden türev ifadesinin 2. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülü elde edilir.

Hata mertebesi artırıldıkça sayısal türev ifadeleri de o mertebede doğruya yakın değerler verir. Örneğin; bölüm 2.2.6.2.1. ve bölüm 2.2.6.2.2.'de ifade edildiği gibi ileri ve geri sonlu fark yaklaşımları kullanıldığında 1. mertebeden sayısal türev ifadesinin hata mertebesi $\vartheta(\Delta x)$ iken; merkezî sonlu fark yaklaşımı kullanıldığında hata mertebesi $\vartheta(\Delta x^2)$ olmaktadır. Dolayısıyla merkezî sonlu fark yaklaşımı ile elde edilen türev ifadeleri, ileri ve geri sonlu fark yaklaşımı ile elde edilen türev ifadelerine kıyasla daha doğru yani (göz önüne alınan denklemin veya denklem sisteminin analitik çözümü mevcutsa) analitik değere daha yakın değerler verir. Şekil 2.11'de her 3 yaklaşım ile elde edilen sonlu fark türev formülleri grafiksel olarak gösterilmiştir ve bu grafikten de anlaşılacağı üzere teğet doğrusunun eğimine en yakın eğimin LN kirişinin eğimi olduğu, dolayısıyla merkezî sonlu fark yaklaşımı ile elde edilen türev formülünün daha doğru başka bir ifadeyle; daha hassas değer verdiği görülmektedir.



Şekil 2.11: İleri, geri ve merkezî sonlu fark türev formüllerinin grafiksel gösterimi.

Sonuç olarak, merkezî sonlu fark yaklaşımı ile elde edilen türev formülleri, ileri ve geri sonlu fark yaklaşımı ile elde edilen türev formüllerine kıyasla daha doğru başka bir ifadeyle; daha hassas sonuçlar verdiğinden dolayı bu çalışmada sonlu fark türev formülleri elde edilirken merkezî sonlu fark yaklaşımı kullanılmıştır ve hata mertebesi 4. mertebe olarak dikkate alınmıştır.

2.2.6.3. Merkezî Sonlu Fark Yaklaşımı Kullanılarak 4. Hata Mertebesinden Hassasiyet ile Merkezî Sonlu Fark Türev Formülleri

1. türev mertebesinden kısmî türev ifadelerinin 4. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülleri olarak ifade edilebilmesi için aşağıdaki işlemler yapılır.

$y = f(x)$ fonksiyonunun dik koordinat sistemindeki (x_{i+1}). noktaya göre açılan Taylor Serisi açılımı olan (2.179) no.'lu denklemde 6. terimden sonra yer alan yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edilir ve (2.198) no.'lu denklem elde edilir. (2.198) no.'lu denklem, 6. terimden sonra yer alan yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edildiğinden dolayı 5. hata mertebesinden kesme hatası içerir.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} + \frac{\Delta x^5}{5!}\frac{\partial^5 f(x_i)}{\partial x^5} \tag{2.198}$$

$y = f(x)$ fonksiyonunun dik koordinat sistemindeki (x_{i-1}). noktaya göre açılan Taylor Serisi açılımı olan (2.180) no.'lu denklemde 6. terimden sonra yer alan yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edilir ve (2.199) no.'lu denklem elde edilir. (2.199) no.'lu denklem, 6. terimden sonra yer alan yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edildiğinden dolayı 5. hata mertebesinden kesme hatası içerir.

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - \Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} - \frac{\Delta x^5}{5!}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} \tag{2.199}$$

x_{i-1} noktasındaki türev değerine 5. hata mertebesinden hassasiyetle eşit olan (2.199) no.'lu denklem, x_{i+1} noktasındaki türev değerine 5. hata mertebesinden hassasiyetle eşit olan (2.198) no.'lu denklemden çıkarılarak (2.200) no.'lu denklem elde edilir;

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2\Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^3}{3}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^5}{60}\frac{\partial^5 f(x_i)}{\partial x^5} \tag{2.200}$$

$y = f(x)$ fonksiyonunun dik koordinat sistemindeki (x_{i+2}). noktaya göre açılan Taylor Serisi açılımı olan (2.201) no.'lu denklemde 6. terimden sonra yer alan yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edilir ve (2.202) no.'lu denklem elde edilir. (2.202) no.'lu denklemde 6. terimden sonra yer alan yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edildiğinden dolayı bu denklem 5. hata mertebesinden kesme hatası içerir.

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + 2\Delta x\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{4\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} + \frac{8\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{16\Delta x^4}{4!}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} + \frac{32\Delta x^5}{5!}\frac{\partial^5 f(x_i)}{\partial x^5} + \cdots + \frac{(2\Delta x)^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + R_n \tag{2.201}$$

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + 2\Delta x\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{4\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} + \frac{8\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{16\Delta x^4}{4!}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} + \frac{32\Delta x^5}{5!}\frac{\partial^5 f(x_i)}{\partial x^5} \tag{2.202}$$

$y = f(x)$ fonksiyonunun dik koordinat sistemindeki (x_{i-2}). noktaya göre açılan Taylor Serisi açılımı olan (2.203) no.'lu denklemde 6. terimden sonra yer alan yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edilir ve (2.204) no.'lu denklem elde edilir. (2.204) no.'lu denklemde 6. terimden sonra yer alan yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edildiğinden dolayı bu denklem 5. hata mertebesinden kesme hatası içerir.

$$f(x_{i-2}) = f(x_i) - 2\Delta x\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{4\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} - \frac{8\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{16\Delta x^4}{4!}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} + \frac{32\Delta x^5}{5!}\frac{\partial^5 f(x_i)}{\partial x^5} + \cdots + \frac{(2\Delta x)^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n} - R_n \tag{2.203}$$

$$f(x_{i-2}) = f(x_i) - 2\Delta x\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{4\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} - \frac{8\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{16\Delta x^4}{4!}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} + \frac{32\Delta x^5}{5!}\frac{\partial^5 f(x_i)}{\partial x^5} \tag{2.204}$$

x_{i-2} noktasındaki türev değerine 5. hata mertebesinden hassasiyetle eşit olan (2.204) no.'lu denklem, x_{i+2} noktasındaki türev değerine 5. hata mertebesinden hassasiyetle eşit olan (2.202) no.'lu denklemden çıkarılarak (2.205) no.'lu denklem elde edilir;

$$f(x_{i+2}) - f(x_{i-2}) = 4\Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{8\Delta x^3}{3}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{32\Delta x^5}{60}\frac{\partial^5 f(x_i)}{\partial x^5} \tag{2.205}$$

(2.200) ve (2.205) no.'lu denklemlerden (2.200) no.'lu denklemin her iki tarafı -8 sayısı ile çarpılıp elde edilen (2.206) no.'lu denklem ile (2.205) no.'lu denklem taraf tarafa toplanarak (2.207) no.'lu denklem elde edilir;

$$f(x_{i+2}) - f(x_{i-2}) = 4\Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{8\Delta x^3}{3}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{32\Delta x^5}{60}\frac{\partial^5 f(x_i)}{\partial x^5} \tag{2.205}$$

$$-8f(x_{i+1}) + 8f(x_{i-1}) = -16\Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} - 8\frac{\Delta x^3}{3}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} - 8\frac{\Delta x^5}{60}\frac{\partial^5 f(x_i)}{\partial x^5} \tag{2.206}$$

$+$

$$f(x_{i+2}) - f(x_{i-2}) - 8f(x_{i+1}) + 8f(x_{i-1}) = -12\Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{2\Delta x^5}{5}\frac{\partial^5 f(x_i)}{\partial x^5} \tag{2.207}$$

(2.207) no.'lu denklemden 1. mertebeden türev ifadesi çekilerek x_i noktasına göre 4. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülü elde edilir;

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12\Delta x} + \frac{\Delta x^4}{30}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} \tag{2.208}$$

(2.208) no.'lu denklemin sağ tarafında yer alan 2. terim, kesme hatası değeridir. Kesme hatası değeri yerine hata mertebesi göz önüne alınır ve bu hata mertebesi $\vartheta(\Delta x^4)$ sembolü ile gösterilirse denklem daha sade bir hâle dönüşür;

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12\Delta x} + \vartheta(\Delta x^4) \tag{2.209}$$

olarak 1. mertebeden türev ifadesinin 4. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülü elde edilir.

1. türev mertebesinden kısmî türev ifadelerinin 4. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formüllerinin elde edilebilmesi için izlenen çözüm aşamaları, 2. türev mertebesinden kısmî türev ifadelerinin 4. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülleri olarak ifade edilebilmesi için de uygulanır.

$y = f(x)$ fonksiyonunun dik koordinat sistemindeki (x_{i+1}). noktaya göre açılan Taylor Serisi açılımının 7. terimden sonra yer alan yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edilir ve (2.210) no.'lu denklem elde edilir. (2.210) no.'lu denklemde 7. terimden sonra yer alan yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edildiğinden dolayı bu denklem 6. hata mertebesinden kesme hatası içerir.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} + \frac{\Delta x^5}{5!}\frac{\partial^5 f(x_i)}{\partial x^5} + \frac{\Delta x^6}{6!}\frac{\partial^6 f(x_i)}{\partial x^6} \tag{2.210}$$

$y = f(x)$ fonksiyonunun dik koordinat sistemindeki (x_{i-1}). noktaya göre açılan Taylor Serisi açılımının 7. terimden sonra yer alan yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edilir ve (2.211) no.'lu denklem elde edilir. (2.211) no.'lu denklemde 7. terimden sonra yer alan yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edildiğinden dolayı bu denklem 6. hata mertebesinden kesme hatası içerir.

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - \Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} - \frac{\Delta x^5}{5!}\frac{\partial^5 f(x_i)}{\partial x^5} + \frac{\Delta x^6}{6!}\frac{\partial^6 f(x_i)}{\partial x^6} \tag{2.211}$$

x_{i+1} noktasındaki türev değerine 6. hata mertebesinden hassasiyetle eşit olan (2.210) no.'lu denklem ile x_{i-1} noktasındaki türev değerine 6. hata mertebesinden hassasiyetle eşit olan (2.211) no.'lu denklem taraf tarafa toplanırsa (2.212) no.'lu denklem elde edilir;

$$f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) = 2f(x_i) + \Delta x^2 \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^4}{12} \frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} + \frac{\Delta x^6}{360} \frac{\partial^6 f(x_i)}{\partial x^6} \tag{2.212}$$

$y = f(x)$ fonksiyonunun dik koordinat sistemindeki (x_{i+2}). noktaya göre açılan Taylor Serisi açılımının 7. terimden sonra yer alan yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edilir ve (2.213) no.'lu denklem elde edilir. (2.213) no.'lu denklemde 7. terimden sonra yer alan yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edildiğinden dolayı bu denklem 6. hata mertebesinden kesme hatası içerir.

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + 2\Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{4\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} + \frac{8\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{16\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} + \frac{32\Delta x^5}{5!} \frac{\partial^5 f(x_i)}{\partial x^5} + \frac{64\Delta x^6}{6!} \frac{\partial^6 f(x_i)}{\partial x^6} \tag{2.213}$$

$y = f(x)$ fonksiyonunun dik koordinat sistemindeki (x_{i-2}). noktaya göre açılan Taylor Serisi açılımının 7. terimden sonra yer alan yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edilir ve (2.214) no.'lu denklem elde edilir. (2.214) no.'lu denklemde 7. terimden sonra yer alan yüksek mertebeden türev terimleri ihmal edildiğinden dolayı bu denklem 6. hata mertebesinden kesme hatası içerir.

$$f(x_{i-2}) = f(x_i) - 2\Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \frac{4\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} - \frac{8\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x_i)}{\partial x^3} + \frac{16\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} - \frac{32\Delta x^5}{5!} \frac{\partial^5 f(x_i)}{\partial x^5} + \frac{64\Delta x^5}{6!} \frac{\partial^6 f(x_i)}{\partial x^6} \tag{2.214}$$

x_{i+2} noktasındaki türev değerine 6. hata mertebesinden hassasiyetle eşit olan (2.213) no.'lu denklem ile x_{i-2} noktasındaki türev değerine 6. hata mertebesinden hassasiyetle eşit olan (2.214) no.'lu denklem taraf tarafa toplanırsa (2.215) no.'lu denklem elde edilir;

$$f(x_{i+2}) + f(x_{i-2}) = 2f(x_i) + 4\Delta x^2 \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} + \frac{16\Delta x^4}{12}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} + \frac{64\Delta x^6}{360}\frac{\partial^6 f(x_i)}{\partial x^6} \tag{2.215}$$

(2.212) ve (2.215) no.'lu denklemlerden (2.212) no.'lu denklemin her iki tarafı 16 sayısı ile çarpılıp elde edilen (2.216) no.'lu denklemden (2.215) no.'lu denklem çıkarılarak (2.217) no.'lu denklem elde edilir;

$$16f(x_{i+1}) + 16f(x_{i-1}) = 32f(x_i) + 16\Delta x^2 \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} + 16\frac{\Delta x^4}{12}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} + 16\frac{\Delta x^6}{360}\frac{\partial^6 f(x_i)}{\partial x^6} \tag{2.216}$$

$$-f(x_{i+2}) - f(x_{i-2}) = -2f(x_i) - 4\Delta x^2 \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} - \frac{16\Delta x^4}{12}\frac{\partial^4 f(x_i)}{\partial x^4} - \frac{64\Delta x^6}{360}\frac{\partial^6 f(x_i)}{\partial x^6} \tag{2.215}$$

$+$

$$-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}) = 12\Delta x^2 \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} - \frac{48\Delta x^6}{360}\frac{\partial^6 f(x_i)}{\partial x^6} \tag{2.217}$$

(2.217) no.'lu denklemden 2. mertebeden türev ifadesi çekilerek x_i noktasına göre 4. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülü elde edilir;

$$\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12\Delta x^2} + \frac{\Delta x^4}{90}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6} \tag{2.218}$$

(2.218) no.'lu denklemin sağ tarafında yer alan 2. terim, kesme hatası değeridir. Kesme hatası değeri yerine hata mertebesi göz önüne alınır ve bu hata mertebesi $\vartheta(\Delta x^4)$ sembolü ile gösterilirse denklem daha sade bir hâle dönüşür;

$$\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12\Delta x^2} + \vartheta(\Delta x^4) \tag{2.219}$$

olarak 2. mertebeden türev ifadesinin 4. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülü elde edilir.

Bölüm 2.2.6.2.1., bölüm 2.2.6.2.2., bölüm 2.2.6.2.3. ve bu bölümde elde edilen sonlu fark türev formülleri, x_i noktasına göre tek yön göz önüne alınarak elde edilmiştir. Hem x- hem de y-yönü göz önüne alınarak kartezyen koordinat sisteminde 4. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülleri Tablo 2.2'de verilmiştir. İlerleyen bölümlerde Akım Fonksiyonu'nun ve Vortisite'nin 4. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülleri Tablo 2.2 göz önüne alınarak elde edilir.

Tablo 2.2'de x-y düzleminde ifade edilen merkezî sonlu fark türev formüllerinde yer alan indis notasyonlarından i alt indisi, x-ekseni yönündeki noktaları, j alt indisi ise y-ekseni yönündeki noktaları ifade etmektedir.

Tablo 2.2: Kartezyen koordinat sisteminde 4. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri, $\vartheta(\Delta x^4, \Delta y^4)$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f_{i+2,j} + 8f_{i+1,j} - 8f_{i-1,j} + f_{i-2,j}}{12\Delta x} + \vartheta(\Delta x^4)$
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-f_{i,j+2} + 8f_{i,j+1} - 8f_{i,j-1} + f_{i,j-2}}{12\Delta y} + \vartheta(\Delta y^4)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-f_{i+2,j} + 16f_{i+1,j} - 30f_{i,j} + 16f_{i-1,j} - f_{i-2,j}}{12\Delta x^2} + \vartheta(\Delta x^4)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-f_{i,j+2} + 16f_{i,j+1} - 30f_{i,j} + 16f_{i,j-1} - f_{i,j-2}}{12\Delta y^2} + \vartheta(\Delta y^4)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(\frac{f_{i+2,j+2} - 8f_{i+1,j+2} + 8f_{i-1,j+2} - f_{i-2,j+2} - 8f_{i+2,j+1} + 64f_{i+1,j+1} - 64f_{i-1,j+1} + 8f_{i-2,j+1}}{144\Delta x \Delta y} \right.$ $\left. + \frac{8f_{i+2,j-1} - 64f_{i+1,j-1} + 64f_{i-1,j-1} - 8f_{i-2,j-1} - f_{i+2,j-2} + 8f_{i+1,j-2} - 8f_{i-1,j-2} + f_{i-2,j-2}}{144\Delta x \Delta y} \right) + \vartheta(\Delta x^4, \Delta y^4)$
$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \left(\frac{f_{i+2,j+2} - 16f_{i+1,j+2} + 30f_{i,j+2} - 16f_{i-1,j+2} + f_{i-2,j+2} - 8f_{i+2,j+1} + 128f_{i+1,j+1} - 240f_{i,j+1} + 128f_{i-1,j+1} - 8f_{i-2,j+1}}{144\Delta x^2 \Delta y} \right.$ $\left. + \frac{8f_{i+2,j-1} - 128f_{i+1,j-1} + 240f_{i,j-1} - 128f_{i-1,j-1} + 8f_{i-2,j-1} - f_{i+2,j-2} + 16f_{i+1,j-2} - 30f_{i,j-2} + 16f_{i-1,j-2} - f_{i-2,j-2}}{144\Delta x^2 \Delta y} \right) + \vartheta(\Delta x^4, \Delta y^4)$
$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \left(\frac{f_{i+2,j+2} - 16f_{i+2,j+1} + 30f_{i+2,j} - 16f_{i+2,j-1} + f_{i+2,j-2} - 8f_{i+1,j+2} + 128f_{i+1,j+1} - 240f_{i+1,j} + 128f_{i+1,j-1} - 8f_{i+1,j-2}}{144\Delta x \Delta y^2} \right.$ $\left. + \frac{8f_{i-1,j+2} - 128f_{i-1,j+1} + 240f_{i-1,j} - 128f_{i-1,j-1} + 8f_{i-1,j-2} - f_{i-2,j+2} + 16f_{i-2,j+1} - 30f_{i-2,j} + 16f_{i-2,j-1} - f_{i-2,j-2}}{144\Delta x \Delta y^2} \right) + \vartheta(\Delta x^4, \Delta y^4)$

Tablo 2.2: Devamı.

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \left(\frac{f_{i+2,j+2} - 16f_{i+1,j+2} + 30f_{i,j+2} - 16f_{i-1,j+2} + f_{i-2,j+2} - 16f_{i+2,j+1} + 256f_{i+1,j+1} - 480f_{i,j+1} + 256f_{i-1,j+1} - 16f_{i-2,j+1}}{144\Delta x^2 \Delta y^2} \right.$$
$$+ \frac{30f_{i+2,j} - 480f_{i+1,j} + 900f_{i,j} - 480f_{i-1,j} + 30f_{i-2,j} - 16f_{i+2,j-1} + 256f_{i+1,j-1} - 480f_{i,j-1} + 256f_{i-1,j-1} - 16f_{i-2,j-1}}{144\Delta x^2 \Delta y^2}$$
$$\left. + \frac{f_{i+2,j-2} - 16f_{i+1,j-2} + 30f_{i,j-2} - 16f_{i-1,j-2} + f_{i-2,j-2}}{144\Delta x^2 \Delta y^2} \right) + \vartheta(\Delta x^4, \Delta y^4)$$

2.2.6.3.1. Akım Fonksiyonu ve Vortisitenin Hesaplama alanındaki Kartezyen Koordinat Sisteminde (ξ-η Düzleminde) 4. Hata Mertebesinden Hassasiyet ile Merkezî Sonlu Fark Türev Formülleri

Bölüm 2.2.6.3.'te verilen Tablo 2.2 göz önüne alınarak Akım Fonksiyonu'nun hesaplama alanındaki kartezyen koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; ξ-η düzleminde 1. mertebeden türev ifadesinin 4. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri;

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{-\psi_{i+2,j} + 8\psi_{i+1,j} - 8\psi_{i-1,j} + \psi_{i-2,j}}{12\Delta\xi} + \vartheta(\Delta\xi^4) \tag{2.220}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{-\psi_{i,j+2} + 8\psi_{i,j+1} - 8\psi_{i,j-1} + \psi_{i,j-2}}{12\Delta\eta} + \vartheta(\Delta\eta^4) \tag{2.221}$$

olarak ifade edilir.

Akım Fonksiyonu'nun ξ-η düzleminde 2. mertebeden türev ifadesinin 4. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri;

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = \frac{-\psi_{i+2,j} + 16\psi_{i+1,j} - 30\psi_{i,j} + 16\psi_{i-1,j} - \psi_{i-2,j}}{12\Delta\xi^2} + \vartheta(\Delta\xi^4) \tag{2.222}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \frac{-\psi_{i,j+2} + 16\psi_{i,j+1} - 30\psi_{i,j} + 16\psi_{i,j-1} - \psi_{i,j-2}}{12\Delta\eta^2} + \vartheta(\Delta\eta^4) \tag{2.223}$$

olarak ifade edilir.

Bölüm 2.2.6.3.'te verilen Tablo 2.2 göz önüne alınarak Vortisite'nin ξ-η düzleminde 1. mertebeden türev ifadesinin 4. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri;

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \frac{-\omega_{i+2,j} + 8\omega_{i+1,j} - 8\omega_{i-1,j} + \omega_{i-2,j}}{12\Delta\xi} + \vartheta(\Delta\xi^4) \tag{2.224}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{-\omega_{i,j+2} + 8\omega_{i,j+1} - 8\omega_{i,j-1} + \omega_{i,j-2}}{12\Delta\eta} + \vartheta(\Delta\eta^4) \tag{2.225}$$

olarak ifade edilir.

Akım Fonksiyonu'nun ξ-η düzleminde 2. mertebeden türev ifadesinin 4. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri;

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} = \frac{-\omega_{i+2,j} + 16\omega_{i+1,j} - 30\omega_{i,j} + 16\omega_{i-1,j} - \omega_{i-2,j}}{12\Delta\xi^2} + \vartheta(\Delta\xi^4) \tag{2.226}$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2} = \frac{-\omega_{i,j+2} + 16\omega_{i,j+1} - 30\omega_{i,j} + 16\omega_{i,j-1} - \omega_{i,j-2}}{12\Delta\eta^2} + \vartheta(\Delta\eta^4) \tag{2.227}$$

olarak ifade edilir.

2.2.7. Navier-Stokes Denklem Sisteminin Akım Fonksiyonu-Vortisite Yaklaşımı Kullanılarak 4. Hata Mertebesinden Hassasiyet ile Nümerik Formülasyonu

Bölüm 2.2.5.2.'de (2.175) no.'lu denklem olarak ifade edilen boyutsuzlaştırılmış Navier-Stokes Denklem Sistemi, Akım Fonksiyonu-Vortisite (ψ-ω) formunda ve ξ-η düzleminde;

$$A\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + B\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + C\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + D\frac{\partial\psi}{\partial\eta} = -\omega$$

$$\frac{1}{Re}\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} + B\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2} + C\frac{\partial\omega}{\partial\xi} + D\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right) = E\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\xi} - \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right) \tag{2.175}$$

olarak ifade edilmiştir. Bu denklem sisteminde yer alan 1. denklem Akım Fonksiyonu Denklemi, 2. denklem ise Vortisite Denklemi'dir. Akım Fonksiyonu ve Vortisite Denklemleri'nin 4. hata mertebesinden sonlu fark denklemleri sırasıyla bölüm 2.2.7.1. ve bölüm 2.2.7.2.'de ifade edilerek doğrusal kısmî türevli diferansiyel denklemlerin sonlu fark denklemleri olarak ifade edilmesi sağlanır.

2.2.7.1. Akım Fonksiyonu Denkleminin 4. Hata Mertebesinden Hassasiyet ile Nümerik Formülasyonu

Bölüm 2.2.6.3.1.'de Taylor Serisi Açılımı ile Sonlu Farklar Yöntemi kullanılarak Akım Fonksiyonu'nun ξ-η düzleminde 1. ve 2. mertebeden türev ifadelerinin 4. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülleri olarak ifade edilen (2.220), (2.221), (2.222) ve (2.223) no.'lu denklemler, bölüm 2.2.5.1.'de ifade edilen (2.160) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi'nde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} A_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i+2,j}+16\psi_{i+1,j}-30\psi_{i,j}+16\psi_{i-1,j}-\psi_{i-2,j}}{12\Delta\xi^2}\right) \\ +B_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i,j+2}+16\psi_{i,j+1}-30\psi_{i,j}+16\psi_{i,j-1}-\psi_{i,j-2}}{12\Delta\eta^2}\right) \\ +C_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i+2,j}+8\psi_{i+1,j}-8\psi_{i-1,j}+\psi_{i-2,j}}{12\Delta\xi}\right) \\ +D_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i,j+2}+8\psi_{i,j+1}-8\psi_{i,j-1}+\psi_{i,j-2}}{12\Delta\eta}\right)=-\omega_{i,j} \end{aligned} \tag{2.228}$$

(2.228) no.'lu denklem, ξ-η düzleminde ifade edildiğinden dolayı ξ-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe olan $\Delta\xi$ değeri ile η-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe olan $\Delta\eta$ değeri birbirine eşittir. Buna göre;

$$\Delta\xi=\Delta\eta=\Delta h \tag{2.229}$$

$$\Delta\xi^2=\Delta\eta^2=\Delta h^2 \tag{2.230}$$

eşitlikleri yazılır ve (2.228) no.'lu denklem bu eşitliklere göre yeniden düzenlenirse;

$$A_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i+2,j}+16\psi_{i+1,j}-30\psi_{i,j}+16\psi_{i-1,j}-\psi_{i-2,j}}{12\Delta h^2}\right)$$
$$+B_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i,j+2}+16\psi_{i,j+1}-30\psi_{i,j}+16\psi_{i,j-1}-\psi_{i,j-2}}{12\Delta h^2}\right)$$
$$+C_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i+2,j}+8\psi_{i+1,j}-8\psi_{i-1,j}+\psi_{i-2,j}}{12\Delta h}\right) \quad (2.231)$$
$$+D_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i,j+2}+8\psi_{i,j+1}-8\psi_{i,j-1}+\psi_{i,j-2}}{12\Delta h}\right)=-\omega_{i,j}$$

olarak iki-boyutlu, daimî ve sıkıştırılamaz akış problemleri için Akım Fonksiyonu Denklemi'nin ξ-η düzleminde 4. hata mertebesinden hassasiyet ile sonlu fark denklemi elde edilir. (2.231) no.'lu sonlu fark denklemi, bölüm 2.2.5.1.'de ifade edilen (2.160) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi'nin 4. mertebeden hassasiyette ($\vartheta(\Delta\xi^4,\Delta\eta^4)$) tahminidir ve (2.231) no.'lu denklemin çözümü aynı zamanda (2.160) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi'nin de 4. mertebeden doğrulukta bir çözümüdür.

(2.231) no.'lu denklemde yer alan sonlu fark denklemleri yerine kısmî türev ifadeleri yazılarak denklem yeniden düzenlenirse;

$$A\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+B\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+C\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+D\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=-\omega \quad (2.232)$$

olarak Akım Fonksiyonu Denklemi'nin 4. hata mertebesinden genel ifadesi elde edilir.

Akım Fonksiyonu Denklemi'nin 4. hata mertebesinden genel ifadesi olan (2.232) no.'lu denklem ile bölüm 2.2.5.1.'de ifade edilen (2.160) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi aynı formdadır. (2.232) no.'lu denklemde yer alan A, B, C ve D sabit toplamlarına karşılık gelen ifadeler, hatırlanacağı üzere bölüm 2.2.5.1.'de (2.156), (2.157), (2.158) ve (2.159) no.'lu denklemler olarak ifade edilmiştir.

(2.232) no.'lu denklemin ifade edilme aşamasına kadar göz önüne alınan denklemlerde çapraz türev ifadeleri yer almamıştır. Bu denklemlerin çapraz türev ifadelerini içermemesinin 2 farklı nedeni vardır;

i) Fiziksel alandaki koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; x-y düzleminde ifade edilen denklemler, koordinat transformasyonu ile hesaplama alanındaki koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; ξ-η düzleminde ifade edildiğinde bölüm

2.2.5.1.'de ifade edilen (2.154) no.'lu terimin değerinin 0'a eşit olmasından dolayı bu denklem ile çarpım hâlinde olan çapraz türev ifadelerini içeren terimler de 0'a eşit olur ve böylece çapraz türev ifadeleri denklemlerde yer almaz.

ii) Bölüm 2.2.6.3.1.'de (2.220), (2.221), (2.222) ve (2.223) no.'lu denklemler olarak ifade edilen Akım Fonksiyonu'nun ξ-η düzleminde 1. ve 2. mertebeden türevlerinin 4. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formüllerinde 3. ve 4. mertebeden türev ifadeleri bulunmamaktadır. Dolayısıyla Akım Fonksiyonu'nun 3. ve 4. mertebeden türev ifadelerinin elde edilebilmesi için bölüm 2.2.5.1.'de ifade edilen (2.160) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi'nin ξ ve η bağımsız değişkenlerine göre 1. ve 2. mertebeden türevlerinin alınması gerekmediğinden dolayı Akım Fonksiyonu'nun 1. ve 2. mertebeden türev ifadelerinin merkezî sonlu fark türev formüllerinde çapraz türev ifadeleri yer almaz.

Literatürde Navier-Stokes Akış Denklemleri'nin Sonlu Farklar Yöntemi kullanılarak 4. hata mertebesinden hassasiyetle nümerik formülasyonlarının ele alındığı nümerik çalışmalardan [Kaykısızlı, 2006] ve [Güngör, 2007] çalışmalarında ise Akım Fonksiyonu'nun ξ-η düzleminde, ξ ve η bağımsız değişkenlerine göre 1. ve 2. mertebeden türevlerinin 4. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri ve r-θ düzleminde, r ve θ bağımsız değişkenlerine göre 1. ve 2. mertebeden türevlerinin 4. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri;

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta\xi} - \frac{\Delta\xi^2}{6}\frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} + \vartheta(\Delta\xi^4) \tag{2.233}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta\xi^2} - \frac{\Delta\xi^2}{12}\frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} + \vartheta(\Delta\xi^4) \tag{2.234}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta\eta} - \frac{\Delta\eta^2}{6}\frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} + \vartheta(\Delta\eta^4) \tag{2.235}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=\frac{\psi_{i,j+1}-2\psi_{i,j}+\psi_{i,j-1}}{\Delta\eta^2}-\frac{\Delta\eta^2}{12}\frac{\partial^4\psi}{\partial\eta^4}+\vartheta(\Delta\eta^4) \tag{2.236}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2\Delta\theta}-\frac{\Delta\theta^2}{6}\frac{\partial^3\psi}{\partial\theta^3}+\vartheta(\Delta\theta^4) \tag{2.237}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=\frac{\psi_{i+1,j}-2\psi_{i,j}+\psi_{i-1,j}}{\Delta\theta^2}-\frac{\Delta\theta^2}{12}\frac{\partial^4\psi}{\partial\theta^4}+\vartheta(\Delta\theta^4) \tag{2.238}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{2\Delta r}-\frac{\Delta r^2}{6}\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}+\vartheta(\Delta r^4) \tag{2.239}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}=\frac{\psi_{i,j+1}-2\psi_{i,j}+\psi_{i,j-1}}{\Delta r^2}-\frac{\Delta r^2}{12}\frac{\partial^4\psi}{\partial r^4}+\vartheta(\Delta r^4) \tag{2.240}$$

olarak ifade edildiğinden dolayı bu denklemler 3. ve 4. mertebeden türev ifadeleri içermektedir ve bu denklemlerdeki 3. ve 4. mertebeden türev ifadeleri [Kaykısızlı, 2006] çalışmasında;

$$A\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3}=-\left(\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\frac{\partial A}{\partial\xi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+B\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi\partial\eta^2}+\frac{\partial B}{\partial\xi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+C\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial C}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+D\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial D}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) \tag{2.241}$$

$$A\frac{\partial^4\psi}{\partial\xi^4}=-\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial A}{\partial\xi}\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3}+2\frac{\partial B}{\partial\xi}\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi\partial\eta^2}+B\frac{\partial^4\psi}{\partial\xi^2\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+2\frac{\partial C}{\partial\xi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+C\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3}+\frac{\partial^2 C}{\partial\xi^2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+2\frac{\partial D}{\partial\xi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}+D\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^2\partial\eta}+\frac{\partial^2 D}{\partial\xi^2}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) \tag{2.242}$$

$$B\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}=-\left(\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+A\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta\partial\xi^2}\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial A}{\partial\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial B}{\partial\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+C\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{\partial C}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+D\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial D}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) \tag{2.243}$$

$$B\frac{\partial^4\psi}{\partial\eta^4}=-\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}+2\frac{\partial A}{\partial\eta}\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta\partial\xi^2}+A\frac{\partial^4\psi}{\partial\eta^2\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial\eta^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial\eta^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+2\frac{\partial B}{\partial\eta}\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}+2\frac{\partial C}{\partial\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\xi}+C\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^2\partial\xi}+\frac{\partial^2 C}{\partial\eta^2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+2\frac{\partial D}{\partial\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+D\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}+\frac{\partial^2 D}{\partial\eta^2}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) \tag{2.244}$$

olarak ifade edilir.

[Güngör, 2007] çalışmasında ise;

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial\theta^3}=-r^2\frac{\partial\omega}{\partial\theta}-r\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}-r^2\frac{\partial^3\psi}{\partial r^2\partial\theta} \tag{2.245}$$

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial\theta^4}=-r^2\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2}-r\frac{\partial^3\psi}{\partial r\partial\theta^2}-r^2\frac{\partial^4\psi}{\partial r^2\partial\theta^2} \tag{2.246}$$

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}=-\frac{\partial\omega}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3\psi}{\partial\theta^2\partial r} \tag{2.247}$$

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial r^4}=-\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{3}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{8}{r^4}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{5}{r^3}\frac{\partial^3\psi}{\partial\theta^2\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4\psi}{\partial r^2\partial\theta^2} \tag{2.248}$$

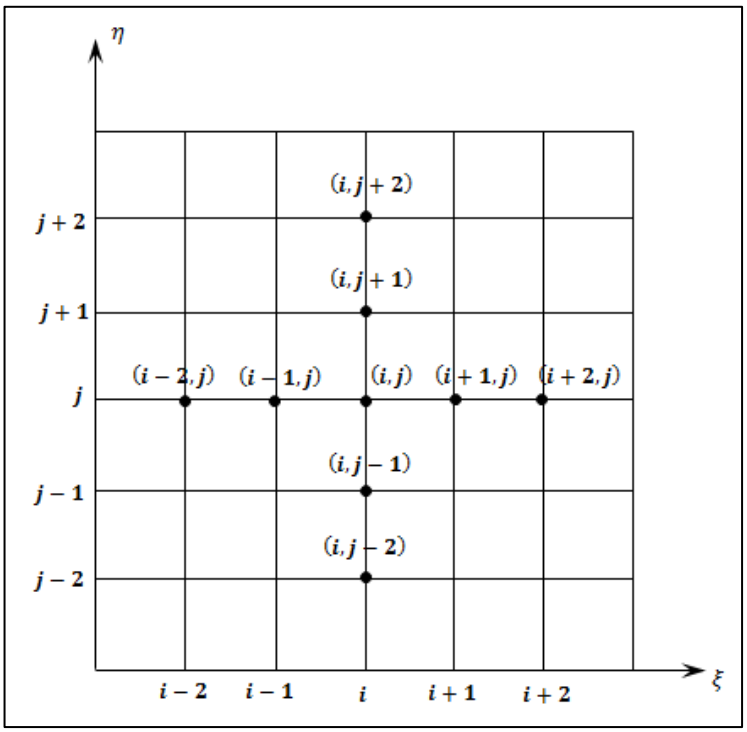
olarak ifade edilir. Dolayısıyla [Kaykısızlı, 2006] ve [Güngör, 2007] çalışmalarında ifade edilen (2.241), (2.242), (2.243), (2.244), (2.245), (2.246), (2.247) ve (2.248) no.'lu denklemlerde $\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}$, $\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^2\partial\eta}$, $\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi\partial\eta^2}$, $\frac{\partial^4\psi}{\partial\xi^2\partial\eta^2}$, $\frac{\partial^3\psi}{\partial\theta^2\partial r}$, $\frac{\partial^3\psi}{\partial\theta\partial r^2}$ ve $\frac{\partial^4\psi}{\partial r^2\partial\theta^2}$ çapraz türev ifadeleri yer aldığından dolayı bu çalışmalarda elde edilen Akım Fonksiyonu'nun 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonlu fark denklemlerinde çapraz türev ifadelerinin merkezî sonlu fark türev formülleri de yer alır.

Mevcut çalışmada ise yukarıda ifade edilen bu 2 farklı nedenden dolayı Akım Fonksiyonu Denklemi'nin 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonlu fark denklemi olan (2.231) no.'lu denklem elde edilirken çapraz türev ifadeleri kullanılmamıştır ve buna bağlı olarak bu denklemde $\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}$, $\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^2\partial\eta}$, $\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi\partial\eta^2}$ ve $\frac{\partial^4\psi}{\partial\xi^2\partial\eta^2}$ çapraz türev ifadelerinde yer alan;

- $(i+2, j+2)$, $(i+1, j+2)$, $(i-1, j+2)$,
- $(i-2, j+2)$, $(i+2, j+1)$, $(i+1, j+1)$, $(i-1, j+1)$, $(i-2, j+1)$,
- $(i+2, j-1)$, $(i+1, j-1)$, $(i-1, j-1)$, $(i-2, j-1)$, $(i+2, j-2)$,
- $(i+1, j-2)$, $(i-1, j-2)$ ve $(i-2, j-2)$

noktaları bulunmamaktadır.

Akım Fonksiyonu Denklemi'nin 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonlu fark denklemi olan (2.231) no.'lu denklemde $(i+2, j)$, $(i+1, j)$, (i, j), $(i-1, j)$, $(i-2, j)$, $(i, j+2)$, $(i, j+1)$, $(i, j-1)$ ve $(i, j-2)$ olmak üzere toplam 9 farklı nokta kullanılmaktadır ve bu noktalar Şekil 2.12'de gösterilmiştir.



Şekil 2.12: Akım Fonksiyonu Denklemi'nin 4. hata mertebesinden hassasiyet ile sonlu fark denkleminde etkin olan noktalar.

2.2.7.2. Vortisite Denkleminin 4. Hata Mertebesinden Hassasiyet ile Nümerik Formülasyonu

Bölüm 2.2.6.3.1.'de Taylor Serisi Açılımı ile Sonlu Farklar Yöntemi kullanılarak Akım Fonksiyonu'nun ξ-η düzleminde 1. mertebeden türev ifadesinin 4. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülleri olarak bölüm 2.2.6.3.1.'de ifade edilen (2.220) ve (2.221) no.'lu denklemler ile Vortisite'nin ξ-η düzleminde 1. ve 2. mertebeden türev ifadelerinin 4. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülleri olarak yine bölüm 2.2.6.3.1.'de ifade edilen (2.224), (2.225), (2.226) ve (2.227) no.'lu denklemler, bölüm 2.2.5.2.'de ifade edilen (2.174) no.'lu Vortisite Denklemi'nde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Re}A_{i,j}\Bigg[&\left(\frac{-\omega_{i+2,j}+16\omega_{i+1,j}-30\omega_{i,j}+16\omega_{i-1,j}-\omega_{i-2,j}}{12\Delta\xi^2}\right)\\
&+B_{i,j}\left(\frac{-\omega_{i,j+2}+16\omega_{i,j+1}-30\omega_{i,j}+16\omega_{i,j-1}-\omega_{i,j-2}}{12\Delta\eta^2}\right)\\
&+C_{i,j}\left(\frac{-\omega_{i+2,j}+8\omega_{i+1,j}-8\omega_{i-1,j}+\omega_{i-2,j}}{12\Delta\xi}\right)\\
&+D_{i,j}\left(\frac{-\omega_{i,j+2}+8\omega_{i,j+1}-8\omega_{i,j-1}+\omega_{i,j-2}}{12\Delta\eta}\right)\Bigg]\\
&=E_{i,j}\Bigg[\left(\frac{-\psi_{i,j+2}+8\psi_{i,j+1}-8\psi_{i,j-1}+\psi_{i,j-2}}{12\Delta\eta}\right)\\
&\times\left(\frac{-\omega_{i+2,j}+8\omega_{i+1,j}-8\omega_{i-1,j}+\omega_{i-2,j}}{12\Delta\xi}\right)\\
&-\left(\frac{-\psi_{i+2,j}+8\psi_{i+1,j}-8\psi_{i-1,j}+\psi_{i-2,j}}{12\Delta\xi}\right)\\
&\times\left(\frac{-\omega_{i,j+2}+8\omega_{i,j+1}-8\omega_{i,j-1}+\omega_{i,j-2}}{12\Delta\eta}\right)\Bigg]
\end{aligned} \tag{2.249}$$

olarak elde edilir. (2.249) no.'lu denklem, ξ-η düzleminde ifade edildiğinden dolayı ξ-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe olan $\Delta\xi$ değeri ile η-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe olan $\Delta\eta$ değeri birbirine eşittir. Buna göre bölüm 2.2.7.1.'de ifade edilen (2.229) ve (2.230) no.'lu denklemler göz önüne alınarak (2.249) no.'lu denklem yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned}\frac{1}{Re}A_{i,j}\Bigg[&\left(\frac{-\omega_{i+2,j}+16\omega_{i+1,j}-30\omega_{i,j}+16\omega_{i-1,j}-\omega_{i-2,j}}{12\Delta h^2}\right)\\&+B_{i,j}\left(\frac{-\omega_{i,j+2}+16\omega_{i,j+1}-30\omega_{i,j}+16\omega_{i,j-1}-\omega_{i,j-2}}{12\Delta h^2}\right)\\&+C_{i,j}\left(\frac{-\omega_{i+2,j}+8\omega_{i+1,j}-8\omega_{i-1,j}+\omega_{i-2,j}}{12\Delta h}\right)\\&+D_{i,j}\left(\frac{-\omega_{i,j+2}+8\omega_{i,j+1}-8\omega_{i,j-1}+\omega_{i,j-2}}{12\Delta h}\right)\Bigg]\\&=E_{i,j}\Bigg[\left(\frac{-\psi_{i,j+2}+8\psi_{i,j+1}-8\psi_{i,j-1}+\psi_{i,j-2}}{12\Delta h}\right)\\&\times\left(\frac{-\omega_{i+2,j}+8\omega_{i+1,j}-8\omega_{i-1,j}+\omega_{i-2,j}}{12\Delta h}\right)\\&-\left(\frac{-\psi_{i+2,j}+8\psi_{i+1,j}-8\psi_{i-1,j}+\psi_{i-2,j}}{12\Delta h}\right)\\&\times\left(\frac{-\omega_{i,j+2}+8\omega_{i,j+1}-8\omega_{i,j-1}+\omega_{i,j-2}}{12\Delta h}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{2.250}$$

olarak iki-boyutlu, daimî ve sıkıştırılamaz akış problemleri için Vortisite Denklemi'nin ξ-η düzleminde 4. hata mertebesinden hassasiyet ile sonlu fark denklemi elde edilir. (2.250) no.'lu sonlu fark denklemi, bölüm 2.2.5.2.'de ifade edilen (2.174) no.'lu Vortisite Denklemi'nin 4. mertebeden hassasiyette ($\vartheta(\Delta\xi^4, \Delta\eta^4)$) tahminidir ve (2.250) no.'lu denklemin çözümü aynı zamanda bölüm 2.2.5.2.'de ifade edilen (2.174) no.'lu Vortisite Denklemi'nin de 4. mertebeden doğrulukta bir çözümüdür.

(2.250) no.'lu denklemde yer alan sonlu fark denklemleri yerine kısmî türev ifadeleri yazılarak denklem yeniden düzenlenirse;

$$\frac{1}{Re}\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+B\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}+C\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+D\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)=E\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}-\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right) \tag{2.251}$$

olarak Vortisite Denklemi'nin 4. hata mertebesinden genel ifadesi elde edilir.

Vortisite Denklemi'nin 4. hata mertebesinden genel ifadesi olan (2.251) no.'lu denklem ile bölüm 2.2.5.2.'de ifade edilen (2.174) no.'lu Vortisite Denklemi aynı formdadır. (2.251) no.'lu denklemde yer alan A, B, C, D ve E sabit toplamlarına karşılık gelen ifadeler, hatırlanacağı üzere bölüm 2.2.5.2.'de (2.168), (2.169), (2.170), (2.171) ve (2.172) no.'lu denklemler olarak ifade edilmiştir.

(2.251) no.'lu denklemin ifade edilme aşamasına kadar göz önüne alınan denklemlerde çapraz türev ifadeleri yer almamıştır. Bu denklemlerin çapraz türev ifadelerini içermemesinin 2 farklı nedeni vardır;

i) Fiziksel alandaki koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; x-y düzleminde ifade edilen denklemler, koordinat transformasyonu ile hesaplama alanındaki koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; ξ-η düzleminde ifade edildiğinde bölüm 2.2.5.2.'de ifade edilen (2.165) no.'lu terimin değerinin 0'a eşit olmasından dolayı bu denklem ile çarpım hâlinde olan çapraz türev ifadelerini içeren terimler de 0'a eşit olur ve böylece çapraz türev ifadeleri denklemlerde yer almaz.

ii) Bölüm 2.2.6.3.1.'de (2.228), (2.229), (2.230) ve (2.231) no.'lu denklemler olarak ifade edilen Vortisite'nin ξ-η düzleminde 1. ve 2. mertebeden türevlerinin 4. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formüllerinde 3. ve 4. mertebeden türev ifadeleri bulunmamaktadır. Dolayısıyla Vortisite'nin 3. ve 4. mertebeden türev ifadelerinin elde edilebilmesi için bölüm 2.2.5.2.'de ifade edilen (2.174) no.'lu Vortisite Denklemi'nin ξ ve η bağımsız değişkenlerine göre 1. ve 2. mertebeden türevlerinin alınması gerekmediğinden dolayı Vortisite'nin 1. ve 2. mertebeden türev ifadelerinin merkezî sonlu fark türev formüllerinde çapraz türev ifadeleri yer almaz.

Literatürde Navier-Stokes Akış Denklemleri'nin Sonlu Farklar Yöntemi kullanılarak 4. hata mertebesinden hassasiyetle nümerik formülasyonlarının ele alındığı nümerik çalışmalardan [Kaykısızlı, 2006] ve [Güngör, 2007] çalışmalarında ise Vortisite'nin ξ-η düzleminde, ξ ve η bağımsız değişkenlerine göre 1. ve 2. mertebeden türevlerinin 4. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri ve r-θ düzleminde, r ve θ bağımsız değişkenlerine göre 1. ve 2. mertebeden türevlerinin 4. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri;

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}}{2\Delta\xi} - \frac{\Delta\xi^2}{6}\frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi^3} + \vartheta(\Delta\xi^4) \tag{2.252}$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}=\frac{\omega_{i+1,j}-2\omega_{i,j}+\omega_{i-1,j}}{\Delta\xi^2}-\frac{\Delta\xi^2}{12}\frac{\partial^4\omega}{\partial\xi^4}+\vartheta(\Delta\xi^4) \tag{2.253}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\eta}=\frac{\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}}{2\Delta\xi}-\frac{\Delta\xi^2}{6}\frac{\partial^3\omega}{\partial\xi^3}+\vartheta(\Delta\eta^4) \tag{2.254}$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}=\frac{\omega_{i,j+1}-2\omega_{i,j}+\omega_{i,j-1}}{\Delta\xi^2}-\frac{\Delta\xi^2}{12}\frac{\partial^4\omega}{\partial\xi^4}+\vartheta(\Delta\eta^4) \tag{2.255}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\theta}=\frac{\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}}{2\Delta\theta}-\frac{\Delta\theta^2}{6}\frac{\partial^3\omega}{\partial\theta^3}+\vartheta(\Delta\theta^4) \tag{2.256}$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2}=\frac{\omega_{i+1,j}-2\omega_{i,j}+\omega_{i-1,j}}{\Delta\theta^2}-\frac{\Delta\theta^2}{12}\frac{\partial^4\omega}{\partial\theta^4}+\vartheta(\Delta\theta^4) \tag{2.257}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial r}=\frac{\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}}{2\Delta r}-\frac{\Delta r^2}{6}\frac{\partial^3\omega}{\partial r^3}+\vartheta(\Delta r^4) \tag{2.258}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}=\frac{\psi_{i,j+1}-2\psi_{i,j}+\psi_{i,j-1}}{\Delta r^2}-\frac{\Delta r^2}{12}\frac{\partial^4\psi}{\partial r^4}+\vartheta(\Delta r^4) \tag{2.259}$$

olarak ifade edildiğinden dolayı 3. ve 4. mertebeden türev ifadeleri içermektedir ve bu denklemlerdeki 3. ve 4. mertebeden türev ifadeleri [Kaykısızlı, 2006] çalışmasında;

$$\begin{aligned}A\frac{\partial^3\omega}{\partial\xi^3}&=Re\frac{\partial E}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+ReE\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+ReE\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}\\&-Re\frac{\partial E}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}-ReE\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}-ReE\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial A}{\partial\xi}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}\\&-\frac{\partial B}{\partial\xi}\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}-B\frac{\partial^3\omega}{\partial\xi\partial\eta^2}-\frac{\partial C}{\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}-C\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}-\frac{\partial D}{\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}-D\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}\end{aligned} \tag{2.260}$$

$$A\frac{\partial^4\omega}{\partial\xi^4}=Re\frac{\partial^2E}{\partial\xi^2}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+2Re\frac{\partial E}{\partial\xi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+2Re\frac{\partial E}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}$$
$$+2ReE\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+ReE\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^2\partial\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+ReE\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^3\omega}{\partial\xi^3}-Re\frac{\partial^2E}{\partial\xi^2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}$$
$$-2Re\frac{\partial E}{\partial\xi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}-2Re\frac{\partial E}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}-ReE\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}$$
$$-2ReE\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}-ReE\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial^3\omega}{\partial\xi^2\partial\eta}-\frac{\partial^2A}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial A}{\partial\xi}\frac{\partial^3\omega}{\partial\xi^3}$$
$$-\frac{\partial^2B}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}-2\frac{\partial B}{\partial\xi}\frac{\partial^3\omega}{\partial\xi\partial\eta^2}-B\frac{\partial^4\omega}{\partial\xi^2\partial\eta^2}-\frac{\partial^2C}{\partial\xi^2}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}-2\frac{\partial C}{\partial\xi}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}$$
$$-C\frac{\partial^3\omega}{\partial\xi^3}-\frac{\partial^2D}{\partial\xi^2}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}-2\frac{\partial D}{\partial\xi}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}-D\frac{\partial^3\omega}{\partial\xi^2\partial\eta} \quad (2.261)$$

$$B\frac{\partial^3\omega}{\partial\eta^3}=Re\frac{\partial E}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+ReE\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+ReE\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta\partial\xi}$$
$$-Re\frac{\partial E}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}-ReE\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}-ReE\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}-\frac{\partial A}{\partial\eta}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} \quad (2.262)$$
$$-A\frac{\partial^3\omega}{\partial\eta\partial\xi^2}-\frac{\partial B}{\partial\eta}\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}-\frac{\partial C}{\partial\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}-C\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta\partial\xi}-\frac{\partial D}{\partial\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}-D\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}$$

$$B\frac{\partial^4\omega}{\partial\eta^4}=Re\frac{\partial^2E}{\partial\eta^2}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+2Re\frac{\partial E}{\partial\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+2Re\frac{\partial E}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta\partial\xi}$$
$$+ReE\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+2Re\frac{\partial E}{\partial\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+ReE\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^3\omega}{\partial\eta^2\partial\xi}$$
$$-Re\frac{\partial^2E}{\partial\eta^2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}-2Re\frac{\partial E}{\partial\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}-2Re\frac{\partial E}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}$$
$$-ReE\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^2\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}-2ReE\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}-ReE\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial^3\omega}{\partial\eta^3}-\frac{\partial^2A}{\partial\eta^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}$$
$$-2\frac{\partial A}{\partial\eta}\frac{\partial^3\omega}{\partial\eta\partial\xi^2}-A\frac{\partial^4\omega}{\partial\eta^2\partial\xi^2}-\frac{\partial^2B}{\partial\eta^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}-2\frac{\partial B}{\partial\eta}\frac{\partial^3\omega}{\partial\eta^3}-\frac{\partial^2C}{\partial\eta^2}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}$$
$$-2\frac{\partial C}{\partial\eta}\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta\partial\xi}-C\frac{\partial^3\omega}{\partial\eta^2\partial\xi}-\frac{\partial^2D}{\partial\eta^2}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}-2\frac{\partial D}{\partial\eta}\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}-D\frac{\partial^3\omega}{\partial\eta^3} \quad (2.263)$$

olarak ifade edilir.

[Güngör, 2007] çalışmasında ise;

$$\frac{\partial^3\omega}{\partial\theta^3} = rRe\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\frac{\partial\omega}{\partial r} + rRe\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\theta} - rRe\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\omega}{\partial\theta} - rRe\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} - r^2\frac{\partial^3\omega}{\partial r^2\partial\theta} - r\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\theta} \tag{2.264}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4\omega}{\partial\theta^4} = {} & -r^3Re\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial\theta} - r^2Re\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\omega}{\partial r} - r^3Re\frac{\partial^3\psi}{\partial r^2\partial\theta}\frac{\partial\omega}{\partial r} \\ & + 2rRe\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\theta} + rRe\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial^3\omega}{\partial r\partial\theta^2} - rRe\frac{\partial^3\psi}{\partial r\partial\theta^2}\frac{\partial\omega}{\partial\theta} \\ & - 2rRe\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} - r^2Re^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\frac{\partial\omega}{\partial r} - r^2Re^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\theta} \\ & + r^2Re^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} + r^2Re^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} + r^3Re\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^3\omega}{\partial r^2\partial\theta} \\ & + r^2Re\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} - r\frac{\partial^3\omega}{\partial r\partial\theta^2} - r^2\frac{\partial^4\omega}{\partial r^2\partial\theta^2}\end{aligned} \tag{2.265}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3\omega}{\partial r^3} = {} & -\frac{Re}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{Re}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{Re}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{Re}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial\theta} \\ & - \frac{Re}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\frac{\partial\omega}{\partial\theta} - \frac{Re}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\omega}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} \\ & - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^3\omega}{\partial r\partial\theta^2}\end{aligned} \tag{2.266}$$

$$\frac{\partial^4\omega}{\partial r^4} = -\frac{4Re}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\omega}{\partial r} - \frac{3Re}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\omega}{\partial r} - \frac{4Re}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}$$
$$+\frac{Re}{r}\frac{\partial^3\psi}{\partial r^2\partial\theta}\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{2Re}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} - \frac{Re^2}{r^3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2\frac{\partial\omega}{\partial r}$$
$$+\frac{Re^2}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{Re^2}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{Re^2}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}$$
$$-\frac{Re^2}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\frac{\partial\omega}{\partial\theta} - \frac{Re^2}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\theta} + \frac{2Re}{r^4}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2}$$
$$-\frac{Re}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial^3\omega}{\partial r\partial\theta^2} - \frac{4Re}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial\theta} + \frac{4Re}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}$$
$$+\frac{3Re}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\theta} + \frac{Re}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial\theta} - \frac{2Re}{r^4}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{Re}{r^3}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\frac{\partial^3\psi}{\partial r\partial\theta^2}$$
$$-\frac{2Re}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\theta} - \frac{Re}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^3\omega}{\partial r^2\partial\theta} - \frac{3}{r^3}\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}$$
$$-\frac{8}{r^4}\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} + \frac{5}{r^3}\frac{\partial^3\omega}{\partial r\partial\theta^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^4\omega}{\partial r^2\partial\theta^2} \qquad (2.267)$$

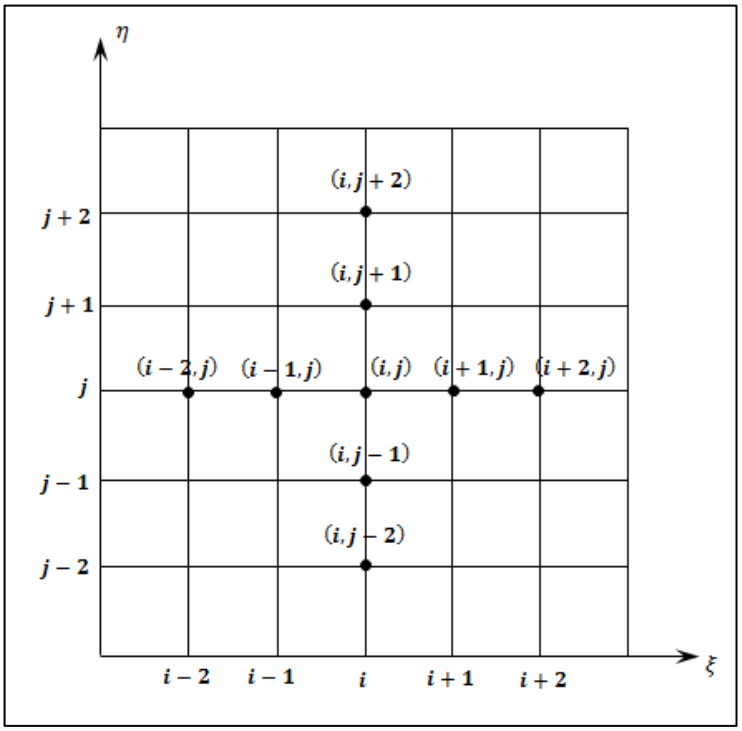
olarak ifade edilir. Dolayısıyla [Kaykısızlı, 2006] ve [Güngör, 2007] çalışmalarında ifade edilen (2.260), (2.261), (2.262), (2.263), (2.264), (2.265), (2.266) ve (2.267) no.'lu denklemlerde $\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}$, $\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^2\partial\eta}$, $\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi\partial\eta^2}$, $\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}$, $\frac{\partial^3\omega}{\partial\xi^2\partial\eta}$, $\frac{\partial^3\omega}{\partial\xi\partial\eta^2}$, $\frac{\partial^4\omega}{\partial\xi^2\partial\eta^2}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial r}$, $\frac{\partial^3\psi}{\partial\theta^2\partial r}$, $\frac{\partial^3\psi}{\partial\theta\partial r^2}$, $\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta\partial r}$, $\frac{\partial^3\omega}{\partial\theta^2\partial r}$, $\frac{\partial^3\omega}{\partial\theta\partial r^2}$ ve $\frac{\partial^4\omega}{\partial\theta^2\partial r^2}$ çapraz türev ifadeleri yer aldığından dolayı bu çalışmalarda elde edilen Vortisite'nin 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonlu fark denklemlerinde çapraz türev ifadelerinin merkezî sonlu fark türev formülleri de yer alır.

Mevcut çalışmada ise yukarıda ifade edilen bu 2 farklı nedenden dolayı Vortisite Denklemi'nin 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonlu fark denklemi olan (2.250) no.'lu denklem elde edilirken çapraz türev ifadeleri kullanılmamıştır ve buna bağlı olarak bu denklemde $\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}$, $\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^2\partial\eta}$, $\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi\partial\eta^2}$, $\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}$, $\frac{\partial^3\omega}{\partial\xi^2\partial\eta}$, $\frac{\partial^3\omega}{\partial\xi\partial\eta^2}$ ve $\frac{\partial^4\omega}{\partial\xi^2\partial\eta^2}$ çapraz türev ifadelerinde yer alan;

- $(i+2, j+2)$, $(i+1, j+2)$, $(i-1, j+2)$, $(i-2, j+2)$, $(i+2, j+1)$,
- $(i+1, j+1)$, $(i-1, j+1)$, $(i-2, j+1)$, $(i+2, j-1)$,
- $(i+1, j-1)$, $(i-1, j-1)$, $(i-2, j-1)$, $(i+2, j-2)$, $(i+1, j-2)$,
- $(i-1, j-2)$ ve $(i-2, j-2)$

noktaları bulunmamaktadır.

Vortisite Denklemi'nin 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonlu fark denklemi olan (2.250) no.'lu denklemde $(i+2,j)$, $(i+1,j)$, (i,j), $(i-1,j)$, $(i-2,j)$, $(i,j+2)$, $(i,j+1)$, $(i,j-1)$ ve $(i,j-2)$ olmak üzere toplam 9 farklı nokta kullanılmaktadır ve bu noktalar Şekil 2.13'te gösterilmiştir.



Şekil 2.13: Vortisite Denklemi'nin 4. hata mertebesinden hassasiyet ile sonlu fark denkleminde etkin olan noktalar.

2.2.8. Navier-Stokes Denklem Sisteminin 4. Hata Mertebesinden Nümerik Çözümünde Uygulanan İteratif Yöntemler

Bölüm 2.2.5.2.'de ξ-η düzleminde ifade edilen Akım Fonksiyonu-Vortisite (ψ-ω) formundaki boyutsuzlaştırılmış Navier-Stokes Denklem Sistemi, doğrusal kısmî türevli diferansiyel denklemlerden oluşmaktadır. Doğrusal kısmî türevli diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde, literatürde uygulanan birçok iteratif (dolaylı) yöntem mevcuttur. Bu iteratif yöntemlerden bazıları;

i) Basit (Tek Adımlı) İterasyon Yöntemi (Jacobi Yöntemi)

ii) Gauss-Seidel Yöntemi

iii) Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi (Rölaksasyon (SOR-Successive Over Relaxation) Yöntemi)

olarak sayılabilir [Karagöz, 2001]. Yukarıda sayılan iterasyon yöntemleri aynı zamanda *Eliptik Nümerik Yöntemler* olarak da tanımlanır.

2.2.8.1. Gauss-Seidel Yöntemi

Gauss-Seidel Yöntemi'nde başlangıçta bir çözüm kümesi kabul edilir. Daha sonra her noktada denklemler iterasyonla sağlanmaya çalışılarak kabul edilen çözüm kümesi gerçek çözüme yaklaştırılır [Yıldız, 2002].

Gauss-Seidel Yöntemi'nin nasıl uygulandığını gösterebilmek amacıyla örnek olarak daimî (sürekli) rejimde iki-boyutlu ısı iletim denklemi göz önüne alınır;

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{2.268}$$

(2.268) no.'lu denklem aynı zamanda Laplace Denklemi'dir ve bu denklem, bölüm 2.2.6.2.3.'de (2.197) no.'lu denklem olarak ifade edilen 2. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülü kullanılarak şu şekilde ifade edilir;

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0 \tag{2.269}$$

Çözüm alanının homojen (eşit aralıklı) ağ yapısından oluştuğu düşünülürse x-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe olan Δx değeri y-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe olan Δy değerine eşit olur. Buna göre;

$$\Delta x^2 = \Delta y^2 = \Delta h^2 \tag{2.270}$$

eşitliğine göre (2.270) no.'lu denklem tekrar düzenlenir;

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta h^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta h^2} = 0 \tag{2.271}$$

(2.271) no.'lu denklemden $T_{i,j}$ terimi çekilerek denklem yeniden düzenlenir;

$$T_{i,j} = \frac{1}{4}\left(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}\right) \tag{2.272}$$

(2.272) no.'lu denklem, Gauss-Seidel İterasyon Yöntemi ile sıcaklıkların bulunacağı denklemdir ve bu denklemde çözümün ıraksamasını engellemek amacıyla Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) ile hesaplanan yeni değerlerin içerisinde eski değerlerin etkisinin de bulunması sağlanır [Yıldız, 2002].

$${T_{i,j}}^{YENİ} = w{T_{i,j}}^{HESAPLANAN} + (1-w){T_{i,j}}^{ESKİ} \tag{2.273}$$

(2.273) no.'lu denklemde, w terimi, relaxation (rölaksasyon) katsayısıdır. Çok sayıda denklem olması hâlinde başka bir ifadeyle bir denklem sistemi göz önüne alınıyorsa yakınsamayı hızlandırmak amacıyla relaxation (rölaksasyon) katsayısı kullanmak mümkündür [Karagöz, 2001]. (2.272) ve (2.273) no.'lu denklemler birleştirilirse $T_{i,j}$ değişkenine ait Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Denklemi elde edilir;

$${T_{i,j}}^{YENİ} = \frac{w}{4}\left(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}\right) + (1-w){T_{i,j}}^{ESKİ} \tag{2.274}$$

(2.274) no.'lu denklemde, rölaksasyon katsayısı w, 0 ile 1 değerleri arasında değişiyorsa yöntem "Under Relaxation", 1 değerine eşitse "Without Relaxation" veya "Gauss-Seidel", 1 ile 2 değerleri arasında değişiyorsa "Over Relaxation" şeklinde adlandırılır [Yıldız, 2002]. Başka bir ifadeyle; rölaksasyon katsayısı, $(0, 1)$ açık aralığında değişiyorsa "zayıf rölaksasyon", 1 değerine eşitse "Gauss-Seidel", $(1, 2)$ açık aralığında değişiyorsa "kuvvetli rölaksasyon" olarak tanımlanır [Karagöz, 2001]. Rölaksasyon katsayısının değeri çözülen problemin karakterine bağlıdır. Dolayısıyla optimum değeri, yani en hızlı yakınsamayı sağlayan değeri deneme-

yanılma yöntemiye belirlenir; ancak bir yaklaşım olarak optimum değer için aşağıdaki ifade kullanılabilir [Karagöz, 2001];

$$w = 2\left(\frac{1-\sqrt{1-\lambda}}{\lambda}\right) \tag{2.275}$$

(2.275) no.'lu denklemde yer alan λ terimi;

$$\lambda = \left[\frac{Cos\left(\frac{\pi}{N_x-1}\right)+\beta^2 Cos\left(\frac{\pi}{N_y-1}\right)}{1+\beta^2}\right]^2 \tag{2.276}$$

eşitliği ile hesaplanır. (2.276) no.'lu denklemde;

- N_x: x-ekseni yönündeki ağ yapısı nokta sayısı
- N_y: y-ekseni yönündeki ağ yapısı nokta sayısı

ifadelerine karşılık gelir. (2.276) no.'lu denklemde yer alan β terimi ise;

$$\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y} \tag{2.277}$$

eşitliği ile hesaplanır. (2.277) no.'lu denklemde;

- Δx: x-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe
- Δy: y-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe

ifadelerine karşılık gelir.

2.2.8.2. Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi

Bu yöntem, bölüm 2.2.8.1.'de açıklanan Gauss-Seidel Yöntemi'nden türetilebilen bir yöntemdir ve Gauss-Seidel Yöntemi'nden farkı, relaxation (rölaksasyon) katsayısının kullanılmasıdır. Çok sayıda denklem olması hâlinde başka bir ifadeyle bir denklem sistemi göz önüne alınıyorsa yakınsamayı hızlandırmak amacıyla relaxation (rölaksasyon) katsayısı kullanmak mümkündür [Karagöz, 2001]. Dolayısıyla göz önüne alınan akış problemi, bir diferansiyel denklem sistemi ile ifade ediliyorsa ve bilinmeyen sayısı oldukça fazla ise yakınsama hızını artırmak dolayısıyla daha kısa sürede çözüm değerleri elde etmek ve çözümün ıraksamasını engellemek amacıyla başka bir ifadeyle; göz önüne alınan denklem sisteminin gerçek (analitik) çözümü mevcut ise elde edilen çözüm değerlerinin gerçek (analitik) çözüm değerlerinden uzaklaşmasını engellemek amacıyla Gauss-Seidel Yöntemi yerine Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi'nin tercih edilmesi daha uygun olur.

Mevcut çalışmada, bölüm 2.2.7.1.'de ifade edilen Akım Fonksiyonu Denklemi'nin 4. hata mertebesinden hassasiyetle genel ifadesi olan (2.232) no.'lu denklem ile bölüm 2.2.7.2.'de ifade edilen Vortisite Denklemi'nin 4. hata mertebesinden hassasiyetle genel ifadesi olan (2.251) no.'lu denklemin çözümü için Gauss-Seidel Yöntemi'nden türetilen Gauss-Seidel Relaxation Yöntemi (Rölaksasyon Yöntemi) uygulanmıştır.

2.2.9. Navier-Stokes Denklem Sisteminin Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi ile İterasyon Denklemlerinin İfadesi

Hesaplama alanındaki iki-boyutlu kartezyen koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; ξ-η düzleminde ifade edilen Akım Fonksiyonu-Vortisite (ψ-ω) formundaki boyutsuzlaştırılmış Navier-Stokes Denklem Sistemi'ni oluşturan Akım Fonksiyonu ve Vortisite Denklemleri, hatırlanacağı üzere bölüm 2.2.7.1. ve bölüm 2.2.7.2.'de sırasıyla (2.231) ve (2.250) no.'lu sonlu fark denklemleri olarak ifade edilmiştir; ancak Akım Fonksiyonu (ψ) ve Vortisite (ω) değişkenlerinin Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi ile iterasyon denklemlerinin nasıl ifade edildiğinin her bir aşamasını göstermek amacıyla Akım Fonksiyonu ve Vortisite

Denklemleri'nin sonlu fark denklemleri, bölüm 2.2.9.1. ve bölüm 2.2.9.2.'de tekrar ifade edilmiştir.

2.2.9.1. Akım Fonksiyonunun Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi ile İterasyon Denkleminin İfadesi

Bölüm 2.2.7.1.'de (2.232) no.'lu denklem olarak ifade edilen Akım Fonksiyonu Denklemi'nin 4. hata mertebesinden genel ifadesi göz önüne alınarak Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi uygulanır ve 3 aşamada Akım Fonksiyonu (ψ) değişkeninin 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denklemi elde edilir. Buna göre 1. aşamada Akım Fonksiyonu Denklemi'nin 4. hata mertebesinden genel ifadesindeki kısmî türev ifadeleri yerine Tablo 2.2'de yer alan 4. hata mertebesinden merkezî sonlu fark türev formülleri yazılır ve (2.278) no.'lu denklem elde edilir;

$$\begin{aligned} A_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i+2,j}+16\psi_{i+1,j}-30\psi_{i,j}+16\psi_{i-1,j}-\psi_{i-2,j}}{12\Delta\xi^2}\right) \\ +B_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i,j+2}+16\psi_{i,j+1}-30\psi_{i,j}+16\psi_{i,j-1}-\psi_{i,j-2}}{12\Delta\eta^2}\right) \\ +C_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i+2,j}+8\psi_{i+1,j}-8\psi_{i-1,j}+\psi_{i-2,j}}{12\Delta\xi}\right) \\ +D_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i,j+2}+8\psi_{i,j+1}-8\psi_{i,j-1}+\psi_{i,j-2}}{12\Delta\eta}\right)=-\omega_{i,j} \end{aligned} \tag{2.278}$$

Çözüm alanının homojen ağ yapısından oluştuğu düşünülürse ξ-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe olan $\Delta\xi$ değeri, η-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe olan $\Delta\eta$ değerine eşit olur. Buna göre bölüm 2.2.7.1.'de ifade edilen (2.229) ve (2.230) no.'lu denklemler göz önüne alınarak (2.278) no.'lu denklem yeniden düzenlenirse;

$$
\begin{aligned}
&A_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i+2,j}+16\psi_{i+1,j}-30\psi_{i,j}+16\psi_{i-1,j}-\psi_{i-2,j}}{12\Delta h^2}\right)\\
&\quad+B_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i,j+2}+16\psi_{i,j+1}-30\psi_{i,j}+16\psi_{i,j-1}-\psi_{i,j-2}}{12\Delta h^2}\right)\\
&\quad+C_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i+2,j}+8\psi_{i+1,j}-8\psi_{i-1,j}+\psi_{i-2,j}}{12\Delta h}\right)\\
&\quad+D_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i,j+2}+8\psi_{i,j+1}-8\psi_{i,j-1}+\psi_{i,j-2}}{12\Delta h}\right)=-\omega_{i,j}
\end{aligned}
\tag{2.279}
$$

olarak elde edilir. 2. aşamada (2.279) no.'lu denklemde birtakım matematiksel işlemler yapılırsa;

$$
\begin{aligned}
&-\frac{30\psi_{i,j}}{12\Delta h^2}\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)+C_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j}}{12\Delta h}\right)\\
&\quad+C_{i,j}\left(\frac{8\left(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}\right)}{12\Delta h}\right)+A_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i+2,j}-\psi_{i-2,j}}{12\Delta h^2}\right)\\
&\quad+A_{i,j}\left(\frac{16\left(\psi_{i+1,j}+\psi_{i-1,j}\right)}{12\Delta h^2}\right)+D_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2}}{12\Delta h}\right)\\
&\quad+D_{i,j}\left(\frac{8\left(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}\right)}{12\Delta h}\right)+B_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i,j+2}-\psi_{i,j-2}}{12\Delta h^2}\right)\\
&\quad+B_{i,j}\left(\frac{16\left(\psi_{i,j+1}+\psi_{i,j-1}\right)}{12\Delta h^2}\right)+\omega_{i,j}=0
\end{aligned}
\tag{2.280}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{5\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)}{2\Delta h^2}\right)\psi_{i,j}=C_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j}}{12\Delta h}\right)\\
&\quad-A_{i,j}\left(\frac{\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j}}{12\Delta h^2}\right)+C_{i,j}\left(\frac{2\left(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}\right)}{3\Delta h}\right)\\
&\quad+A_{i,j}\left(\frac{4\left(\psi_{i+1,j}+\psi_{i-1,j}\right)}{3\Delta h^2}\right)+D_{i,j}\left(\frac{-\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2}}{12\Delta h}\right)\\
&\quad-B_{i,j}\left(\frac{\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2}}{12\Delta h^2}\right)+D_{i,j}\left(\frac{2\left(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}\right)}{3\Delta h}\right)\\
&\quad+B_{i,j}\left(\frac{4\left(\psi_{i,j+1}+\psi_{i,j-1}\right)}{3\Delta h^2}\right)+\omega_{i,j}
\end{aligned}
\tag{2.281}
$$

(2.281) no.'lu denklemin her iki tarafı $\left(\frac{2\Delta h^2}{5(A_{i,j}+B_{i,j})}\right)$ ifadesi ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned}\psi_{i,j} = \frac{\Delta h}{30}\left(\frac{C_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(-\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j}) \\ -\frac{1}{30}\left(\frac{A_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j}) \\ +\frac{4\Delta h}{15}\left(\frac{C_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}) \\ +\frac{8}{15}\left(\frac{A_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(\psi_{i+1,j}+\psi_{i-1,j}) \\ +\frac{\Delta h}{30}\left(\frac{D_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(-\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2}) \\ -\frac{1}{30}\left(\frac{B_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)\left(\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2}\right) \\ +\frac{4\Delta h}{15}\left(\frac{D_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}) \\ +\frac{8}{15}\left(\frac{B_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)\left(\psi_{i,j+1}+\psi_{i,j-1}\right)+\left(\frac{2\Delta h^2}{5(A_{i,j}+B_{i,j})}\right)(\omega_{i,j})\end{aligned} \tag{2.282}$$

olarak elde edilir ve denklemin sağ tarafındaki bütün terimler $\left(\frac{1}{5(A_{i,j}+B_{i,j})}\right)$ ortak parantezine alınırsa;

$$\begin{aligned}\psi_{i,j} = \left(\frac{1}{5(A_{i,j}+B_{i,j})}\right)\Big[\frac{\Delta h}{6}C_{i,j}(-\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j}) \\ -\frac{1}{6}A_{i,j}(\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j})+\frac{4\Delta h}{3}C_{i,j}(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}) \\ +\frac{8}{3}A_{i,j}(\psi_{i+1,j}+\psi_{i-1,j})+\frac{\Delta h}{6}D_{i,j}(-\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2}) \\ -\frac{1}{6}B_{i,j}\left(\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2}\right)+\frac{4\Delta h}{3}D_{i,j}(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}) \\ +\frac{8}{3}B_{i,j}\left(\psi_{i,j+1}+\psi_{i,j-1}\right)+(2\Delta h^2)(\omega_{i,j})\Big]\end{aligned} \tag{2.283}$$

olarak elde edilir ve denklemin sağ tarafındaki $\psi_{i+2,j}$, $\psi_{i+1,j}$, $\psi_{i-1,j}$, $\psi_{i-2,j}$, $\psi_{i,j+2}$, $\psi_{i,j+1}$, $\psi_{i,j-1}$ ve $\psi_{i,j-2}$ ifadelerine ait katsayılar toplanırsa;

$$\psi_{i,j} = \left(\frac{1}{5(A_{i,j}+B_{i,j})}\right)\left[-\left(\frac{\Delta hC_{i,j}+A_{i,j}}{6}\right)(\psi_{i+2,j}) + \left(\frac{4(\Delta hC_{i,j}+2A_{i,j})}{3}\right)(\psi_{i+1,j}) + \left(\frac{4(-\Delta hC_{i,j}+2A_{i,j})}{3}\right)(\psi_{i-1,j}) + \left(\frac{\Delta hC_{i,j}-A_{i,j}}{6}\right)(\psi_{i-2,j}) - \left(\frac{\Delta hD_{i,j}+B_{i,j}}{6}\right)(\psi_{i,j+2}) + \left(\frac{4(\Delta hD_{i,j}+2B_{i,j})}{3}\right)(\psi_{i,j+1}) + \left(\frac{4(-\Delta hD_{i,j}+2B_{i,j})}{3}\right)(\psi_{i,j-1}) + \left(\frac{\Delta hD_{i,j}-B_{i,j}}{6}\right)(\psi_{i,j-2}) + (2\Delta h^2)(\omega_{i,j})\right] \quad (2.284)$$

olarak elde edilir. 3. aşamada ise (2.284) no.'lu denklem relaxation (rölaksasyon) katsayısı, w kullanılarak düzenlenirse başka bir ifadeyle; (2.284) no.'lu denklem, Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi ile ifade edilirse;

$$\psi_{i,j} = w\left(\frac{1}{5(A_{i,j}+B_{i,j})}\right)\left[-\left(\frac{\Delta hC_{i,j}+A_{i,j}}{6}\right)(\psi_{i+2,j}) + \left(\frac{4(\Delta hC_{i,j}+2A_{i,j})}{3}\right)(\psi_{i+1,j}) + \left(\frac{4(-\Delta hC_{i,j}+2A_{i,j})}{3}\right)(\psi_{i-1,j}) + \left(\frac{\Delta hC_{i,j}-A_{i,j}}{6}\right)(\psi_{i-2,j}) - \left(\frac{\Delta hD_{i,j}+B_{i,j}}{6}\right)(\psi_{i,j+2}) + \left(\frac{4(\Delta hD_{i,j}+2B_{i,j})}{3}\right)(\psi_{i,j+1}) + \left(\frac{4(-\Delta hD_{i,j}+2B_{i,j})}{3}\right)(\psi_{i,j-1}) + \left(\frac{\Delta hD_{i,j}-B_{i,j}}{6}\right)(\psi_{i,j-2}) + (2\Delta h^2)(\omega_{i,j})\right] + (1-w)\psi_{i,j} \quad (2.285)$$

olarak Akım Fonksiyonu'nun (ψ'nin) 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denklemi elde edilir. Sonuç olarak çözüm alanının herhangi bir (i,j) noktasındaki Akım Fonksiyonu (ψ) değerleri hesaplanırken 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten (2.285) no.'lu iterasyon denklemi kullanılır.

2.2.9.2. Vortisitenin Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi ile İterasyon Denkleminin İfadesi

Bölüm 2.2.7.2.'de (2.251) no.'lu denklem olarak ifade edilen Vortisite Denklemi'nin 4. hata mertebesinden genel ifadesi göz önüne alınarak Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi uygulanır ve 3 aşamada Vortisite (ω) değişkeninin 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denklemi elde edilir. Buna göre 1. aşamada Vortisite Denklemi'nin 4. hata mertebesinden genel ifadesindeki kısmî türev ifadeleri yerine Tablo 2.2'de yer alan 4. hata mertebesinden merkezî sonlu fark türev formülleri yazılır ve (2.286) no.'lu denklem elde edilir;

$$\begin{aligned}\frac{1}{Re}\Bigg[A_{i,j}&\left(\frac{-\omega_{i+2,j}+16\omega_{i+1,j}-30\omega_{i,j}+16\omega_{i-1,j}-\omega_{i-2,j}}{12\Delta\xi^2}\right)\\&+B_{i,j}\left(\frac{-\omega_{i,j+2}+16\omega_{i,j+1}-30\omega_{i,j}+16\omega_{i,j-1}-\omega_{i,j-2}}{12\Delta\eta^2}\right)\\&+C_{i,j}\left(\frac{-\omega_{i+2,j}+8\omega_{i+1,j}-8\omega_{i-1,j}+\omega_{i-2,j}}{12\Delta\xi}\right)\\&+D_{i,j}\left(\frac{-\omega_{i,j+2}+8\omega_{i,j+1}-8\omega_{i,j-1}+\omega_{i,j-2}}{12\Delta\eta}\right)\Bigg]\\&=E_{i,j}\Bigg[\left(\frac{-\psi_{i,j+2}+8\psi_{i,j+1}-8\psi_{i,j-1}+\psi_{i,j-2}}{12\Delta\eta}\right)\\&\times\left(\frac{-\omega_{i+2,j}+8\omega_{i+1,j}-8\omega_{i-1,j}+\omega_{i-2,j}}{12\Delta\xi}\right)\\&-\left(\frac{-\psi_{i+2,j}+8\psi_{i+1,j}-8\psi_{i-1,j}+\psi_{i-2,j}}{12\Delta\xi}\right)\\&\times\left(\frac{-\omega_{i,j+2}+8\omega_{i,j+1}-8\omega_{i,j-1}+\omega_{i,j-2}}{12\Delta\eta}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{2.286}$$

Çözüm alanının homojen ağ yapısından oluştuğu düşünülürse ξ-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe olan $\Delta\xi$ değeri, η-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe olan $\Delta\eta$ değerine eşit olur. Buna göre bölüm 2.2.7.1.'de ifade edilen (2.229) ve (2.230) no.'lu denklemler göz önüne alınarak (2.286) no.'lu denklem yeniden düzenlenirse;

$$\frac{1}{Re}\Big[A_{i,j}\left(\frac{-\omega_{i+2,j}+16\omega_{i+1,j}-30\omega_{i,j}+16\omega_{i-1,j}-\omega_{i-2,j}}{12\Delta h^2}\right)$$
$$+B_{i,j}\left(\frac{-\omega_{i,j+2}+16\omega_{i,j+1}-30\omega_{i,j}+16\omega_{i,j-1}-\omega_{i,j-2}}{12\Delta h^2}\right)$$
$$+C_{i,j}\left(\frac{-\omega_{i+2,j}+8\omega_{i+1,j}-8\omega_{i-1,j}+\omega_{i-2,j}}{12\Delta h}\right)$$
$$+D_{i,j}\left(\frac{-\omega_{i,j+2}+8\omega_{i,j+1}-8\omega_{i,j-1}+\omega_{i,j-2}}{12\Delta h}\right)\Big]$$
$$=E_{i,j}\Big[\left(\frac{-\psi_{i,j+2}+8\psi_{i,j+1}-8\psi_{i,j-1}+\psi_{i,j-2}}{12\Delta h}\right)$$
$$\times\left(\frac{-\omega_{i+2,j}+8\omega_{i+1,j}-8\omega_{i-1,j}+\omega_{i-2,j}}{12\Delta h}\right)$$
$$-\left(\frac{-\psi_{i+2,j}+8\psi_{i+1,j}-8\psi_{i-1,j}+\psi_{i-2,j}}{12\Delta h}\right)$$
$$\times\left(\frac{-\omega_{i,j+2}+8\omega_{i,j+1}-8\omega_{i,j-1}+\omega_{i,j-2}}{12\Delta h}\right)\Big] \qquad (2.287)$$

olarak elde edilir. 2. aşamada (2.287) no.'lu denklemde birtakım matematiksel işlemler yapılırsa;

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{Re}\frac{30\omega_{i,j}}{12\Delta h^2}\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)-\frac{1}{Re}A_{i,j}\left(\frac{\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j}}{12\Delta h^2}\right)\\
&\quad+\frac{1}{Re}C_{i,j}\left(\frac{-\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j}}{12\Delta h}\right)+\frac{16}{Re}A_{i,j}\left(\frac{\omega_{i+1,j}+\omega_{i-1,j}}{12\Delta h^2}\right)\\
&\quad+\frac{8}{Re}C_{i,j}\left(\frac{\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}}{12\Delta h}\right)-\frac{1}{Re}B_{i,j}\left(\frac{\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2}}{12\Delta h^2}\right)\\
&\quad+\frac{1}{Re}D_{i,j}\left(\frac{-\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2}}{12\Delta h}\right)+\frac{16}{Re}B_{i,j}\left(\frac{\omega_{i,j+1}+\omega_{i,j-1}}{12\Delta h^2}\right)\\
&\quad+\frac{8}{Re}D_{i,j}\left(\frac{\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}}{12\Delta h}\right)\\
&\quad-E_{i,j}\left[\left(\left(\frac{-\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2}}{12\Delta h}\right)+8\left(\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{12\Delta h}\right)\right)\right.\\
&\quad\left.\times\left(\left(\frac{-\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j}}{12\Delta h}\right)+8\left(\frac{\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}}{12\Delta h}\right)\right)\right]\\
&\quad+E_{i,j}\left[\left(\left(\frac{-\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j}}{12\Delta h}\right)+8\left(\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{12\Delta h}\right)\right)\right.\\
&\quad\left.\times\left(\left(\frac{-\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2}}{12\Delta h}\right)+8\left(\frac{\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}}{12\Delta h}\right)\right)\right]=0
\end{aligned}
\tag{2.288}
$$

$$\frac{1}{Re}\left(\frac{5\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)}{2\Delta h^2}\right)\omega_{i,j}=-\frac{1}{Re}A_{i,j}\left(\frac{\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j}}{12\Delta h^2}\right)$$
$$+\frac{1}{Re}C_{i,j}\left(\frac{-\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j}}{12\Delta h}\right)+\frac{4}{Re}A_{i,j}\left(\frac{\omega_{i+1,j}+\omega_{i-1,j}}{3\Delta h^2}\right)$$
$$+\frac{2}{Re}C_{i,j}\left(\frac{\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}}{3\Delta h}\right)-\frac{1}{Re}B_{i,j}\left(\frac{\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2}}{12\Delta h^2}\right)$$
$$+\frac{1}{Re}D_{i,j}\left(\frac{-\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2}}{12\Delta h}\right)+\frac{4}{Re}B_{i,j}\left(\frac{\omega_{i,j+1}+\omega_{i,j-1}}{3\Delta h^2}\right)$$
$$+\frac{2}{Re}D_{i,j}\left(\frac{\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}}{3\Delta h}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{144\Delta h^2}\right)E_{i,j}\left(-\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2}\right)\left(-\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{18\Delta h^2}\right)E_{i,j}\left(-\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2}\right)\left(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}\right) \qquad (2.289)$$
$$-\left(\frac{1}{18\Delta h^2}\right)E_{i,j}\left(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}\right)\left(-\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j}\right)$$
$$-\left(\frac{4}{9\Delta h^2}\right)E_{i,j}\left(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}\right)\left(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{144\Delta h^2}\right)E_{i,j}\left(-\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j}\right)\left(-\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{18\Delta h^2}\right)E_{i,j}\left(-\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j}\right)\left(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{18\Delta h^2}\right)E_{i,j}\left(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}\right)\left(-\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2}\right)$$
$$+\left(\frac{4}{9\Delta h^2}\right)E_{i,j}\left(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}\right)\left(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}\right)$$

(2.289) no.'lu denklemin her iki tarafı $\left(Re\,\frac{2\Delta h^2}{5\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)}\right)$ ifadesi ile çarpılırsa;

$$\omega_{i,j} = -\frac{1}{30}\left(\frac{A_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j}) + \frac{\Delta h}{30}\left(\frac{C_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(-\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j}) + \frac{8}{15}\left(\frac{A_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(\omega_{i+1,j}+\omega_{i-1,j}) + \frac{4\Delta h}{15}\left(\frac{C_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}) - \frac{1}{30}\left(\frac{B_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2}) + \frac{\Delta h}{30}\left(\frac{D_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(-\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2}) + \frac{8}{15}\left(\frac{B_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(\omega_{i,j+1}+\omega_{i,j-1}) + \frac{4\Delta h}{15}\left(\frac{D_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}) - \frac{Re}{360}\left(\frac{E_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(-\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2})(-\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j}) - \frac{Re}{45}\left(\frac{E_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(-\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2})(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}) - \frac{Re}{45}\left(\frac{E_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1})(-\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j}) - \frac{8Re}{45}\left(\frac{E_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1})(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}) + \frac{Re}{360}\left(\frac{E_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(-\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j})(-\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2}) + \frac{Re}{45}\left(\frac{E_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(-\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j})(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}) + \frac{Re}{45}\left(\frac{E_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j})(-\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2}) + \frac{8Re}{45}\left(\frac{E_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j})(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}) \quad (2.290)$$

olarak elde edilir ve denklemin sağ tarafındaki bütün terimler $\left(\frac{1}{15(A_{i,j}+B_{i,j})}\right)$ ortak parantezine alınırsa;

$$\begin{aligned}\omega_{i,j} = \left(\frac{1}{15(A_{i,j}+B_{i,j})}\right)\Big[&-\frac{1}{2}A_{i,j}(\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j})\\ &+\frac{\Delta h}{2}C_{i,j}(-\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j})+8A_{i,j}(\omega_{i+1,j}+\omega_{i-1,j})\\ &+4\Delta hC_{i,j}(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j})-\frac{1}{2}B_{i,j}(\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2})\\ &+\frac{\Delta h}{2}D_{i,j}(-\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2})+8B_{i,j}(\omega_{i,j+1}+\omega_{i,j-1})\\ &+4\Delta hD_{i,j}(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1})\\ &-\frac{Re}{24}E_{i,j}(-\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2})(-\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j})\\ &-\frac{Re}{3}E_{i,j}(-\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2})(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j})\\ &-\frac{Re}{3}E_{i,j}(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1})(-\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j})\\ &-\frac{8Re}{3}E_{i,j}(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1})(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j})\\ &+\frac{Re}{24}E_{i,j}(-\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j})(-\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2})\\ &+\frac{Re}{3}E_{i,j}(-\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j})(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1})\\ &+\frac{Re}{3}E_{i,j}(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j})(-\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2})\\ &+\frac{8Re}{3}E_{i,j}(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j})(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1})\Big]\end{aligned} \tag{2.291}$$

olarak elde edilir ve denklemin sağ tarafındaki $\omega_{i+2,j}$, $\omega_{i+1,j}$, $\omega_{i-1,j}$, $\omega_{i-2,j}$, $\omega_{i,j+2}$, $\omega_{i,j+1}$, $\omega_{i,j-1}$ ve $\omega_{i,j-2}$ ifadelerine ait katsayılar toplanırsa;

$$\omega_{i,j}=\left(\frac{1}{15\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)}\right)\Bigg[-\left(\frac{\Delta hC_{i,j}+A_{i,j}}{2}\right)\left(\omega_{i+2,j}\right)$$
$$+\left(4\Delta hC_{i,j}+8A_{i,j}\right)\left(\omega_{i+1,j}\right)+\left(-4\Delta hC_{i,j}+8A_{i,j}\right)\left(\omega_{i-1,j}\right)$$
$$+\left(\frac{\Delta hC_{i,j}-A_{i,j}}{2}\right)\left(\omega_{i-2,j}\right)-\left(\frac{\Delta hD_{i,j}+B_{i,j}}{2}\right)\left(\omega_{i,j+2}\right)$$
$$+\left(4\Delta hD_{i,j}+8B_{i,j}\right)\left(\omega_{i,j+1}\right)+\left(-4\Delta hD_{i,j}+8B_{i,j}\right)\left(\omega_{i,j-1}\right)$$
$$+\left(\frac{\Delta hD_{i,j}-B_{i,j}}{2}\right)\left(\omega_{i,j-2}\right)$$
$$-\frac{Re}{24}E_{i,j}\left(-\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2}\right)\left(-\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j}\right)$$
$$-\frac{Re}{3}E_{i,j}\left(-\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2}\right)\left(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}\right) \qquad (2.292)$$
$$-\frac{Re}{3}E_{i,j}\left(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}\right)\left(-\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j}\right)$$
$$-\frac{8Re}{3}E_{i,j}\left(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}\right)\left(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}\right)$$
$$+\frac{Re}{24}E_{i,j}\left(-\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j}\right)\left(-\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2}\right)$$
$$+\frac{Re}{3}E_{i,j}\left(-\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j}\right)\left(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}\right)$$
$$+\frac{Re}{3}E_{i,j}\left(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}\right)\left(-\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2}\right)$$
$$+\frac{8Re}{3}E_{i,j}\left(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}\right)\left(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}\right)\Bigg]$$

olarak elde edilir. 3. aşamada ise (2.292) no.'lu denklem, relaxation (rölaksasyon) katsayısı, w kullanılarak düzenlenirse başka bir ifadeyle; (2.292) no.'lu denklem, Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi ile ifade edilirse;

$$\omega_{i,j} = w\left(\frac{1}{15(A_{i,j}+B_{i,j})}\right)\Bigg[-\left(\frac{\Delta h C_{i,j}+A_{i,j}}{2}\right)(\omega_{i+2,j}) + (4\Delta h C_{i,j}+8A_{i,j})(\omega_{i+1,j}) + (-4\Delta h C_{i,j}+8A_{i,j})(\omega_{i-1,j}) + \left(\frac{\Delta h C_{i,j}-A_{i,j}}{2}\right)(\omega_{i-2,j}) - \left(\frac{\Delta h D_{i,j}+B_{i,j}}{2}\right)(\omega_{i,j+2}) + (4\Delta h D_{i,j}+8B_{i,j})(\omega_{i,j+1}) + (-4\Delta h D_{i,j}+8B_{i,j})(\omega_{i,j-1}) + \left(\frac{\Delta h D_{i,j}-B_{i,j}}{2}\right)(\omega_{i,j-2}) - \frac{Re}{24}E_{i,j}(-\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2})(-\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j}) - \frac{Re}{3}E_{i,j}(-\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2})(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}) - \frac{Re}{3}E_{i,j}(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1})(-\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j}) - \frac{8Re}{3}E_{i,j}(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1})(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}) + \frac{Re}{24}E_{i,j}(-\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j})(-\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2}) + \frac{Re}{3}E_{i,j}(-\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j})(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}) + \frac{Re}{3}E_{i,j}(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j})(-\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2}) + \frac{8Re}{3}E_{i,j}(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j})(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1})\Bigg] + (1-w)\omega_{i,j} \tag{2.293}$$

olarak Vortisite'nin (ω'nın) 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denklemi elde edilir. Sonuç olarak çözüm alanının herhangi bir (i,j) noktasındaki Vortisite (ω) değerleri hesaplanırken 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten (2.293) no.'lu iterasyon denklemi kullanılır.

2.2.10. Navier-Stokes Denklem Sisteminin 2. Hata Mertebesinden Nümerik Formülasyonu ile 4. Hata Mertebesinden Nümerik Formülasyonunun Karşılaştırılması

Navier-Stokes Denklem Sistemi'nin 2. hata mertebesinden nümerik formülasyonunda çözüm alanında $f_{i+1,j}$, $f_{i,j}$, $f_{i-1,j}$, $f_{i,j+1}$ ve $f_{i,j-1}$ olmak üzere toplam 5 farklı nokta kullanılmaktadır. 4. hata mertebesinden nümerik formülasyonda ise çözüm alanında $f_{i+2,j}$, $f_{i+1,j}$, $f_{i,j}$, $f_{i-1,j}$, $f_{i-2,j}$, $f_{i,j+2}$, $f_{i,j+1}$, $f_{i,j-1}$ ve $f_{i,j-2}$ olmak üzere toplam 9 farklı nokta kullanılmaktadır. Dolayısıyla 2. hata mertebesinden nümerik formülasyonda dikkate alınan toplam nokta sayısı ile 4. hata mertebesinden nümerik formülasyonda dikkate alınan toplam nokta sayısı birbirinden farklıdır.

Tahmin edileceği üzere 2. hata mertebesinden nümerik formülasyon sonucu elde edilen iteratif çözüm denklemlerindeki terim sayısı, 4. hata mertebesinden nümerik formülasyon sonucu elde edilen iteratif çözüm denklemlerindeki terim sayısından daha azdır ve aradaki farkın nicel olarak görülebilmesi amacıyla bu bölümde Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi ile elde edilen 4. hata mertebesinden iterasyon denklemlerinin yanı sıra 2. hata mertebesinden iterasyon denklemlerine de yer verilmiştir; ancak 2. hata mertebesinden iterasyon denklemlerinin nasıl elde edildiğine ilişkin ayrıntılı bilgi Ek A'da verilmiştir.

Akım Fonksiyonu'nun (ψ'nin) Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi uygulanması sonucu elde edilen 2. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denklemi Ek A'da (A1.17) no.'lu denklem olarak ifade edilmiştir. (A1.17) no.'lu denklemde birbirinden farklı toplam 6 terim bulunmaktadır. Akım Fonksiyonu'nun (ψ'nin) Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi uygulanması sonucu elde edilen 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denklemi ise bölüm 2.2.9.1.'de (2.285) no.'lu denklem olarak ifade edilmiştir. (2.285) no.'lu denklemde birbirinden farklı toplam 10 terim bulumaktadır.

Akım Fonksiyonu'nun (ψ'nin) 2. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denkleminde birbirinden farklı toplam 6 terim bulunurken 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iteratif çözüm denkleminde ise birbirinden farklı toplam 10 terim bulunmaktadır. Aynı zamanda 2. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denkleminde $\psi_{i+1,j}$, $\psi_{i,j}$, $\psi_{i-1,j}$, $\psi_{i,j+1}$ ve $\psi_{i,j-1}$ olmak üzere toplam 5 farklı ağ yapısı noktası dikkate

alınırken 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denkleminde $\psi_{i+2,j}$, $\psi_{i+1,j}$, $\psi_{i,j}$, $\psi_{i-2,j}$, $\psi_{i,j+2}$, $\psi_{i,j+1}$, $\psi_{i,j-1}$ve $\psi_{i,j-2}$ olmak üzere toplam 9 farklı ağ yapısı noktası dikkate alınmaktadır.

Vortisite'nin (ω'nın) Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi uygulanması sonucu elde edilen 2. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denklemi Ek A'da ifade edilmiştir (A1.26) no.'lu denklem olarak ifade edilmiştir. (A1.26) no.'lu denklemde birbirinden farklı toplam 7 terim bulunmaktadır. Vortisite'nin (ω'nın) Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi uygulanması sonucu elde edilen 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denklemi ise bölüm 2.2.9.2.'de (2.293) no.'lu denklem olarak ifade edilmiştir. (2.293) no.'lu denklemde birbirinden farklı toplam 17 terim bulumaktadır.

Vortisite'nin (ω'nin) 2. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denkleminde birbirinden farklı toplam 7 terim bulunurken 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iteratif çözüm denkleminde birbirinden farklı toplam 17 terim bulunmaktadır. Aynı zamanda 2. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denkleminde $\omega_{i+1,j}$, $\omega_{i,j}$, $\omega_{i-1,j}$, $\omega_{i,j+1}$ ve $\omega_{i,j-1}$ olmak üzere toplam 5 farklı ağ yapısı noktası dikkate alınırken 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denkleminde $\omega_{i+2,j}$, $\omega_{i+1,j}$, $\omega_{i,j}$, $\omega_{i-2,j}$, $\omega_{i,j+2}$, $\omega_{i,j+1}$, $\omega_{i,j-1}$ ve $\omega_{i,j-1}$ olmak üzere toplam 9 farklı ağ yapısı noktası dikkate alınmaktadır.

Sonuç olarak çözüm alanının herhangi bir (i,j) noktasındaki Akım Fonksiyonu (ψ) ve Vortisite (ω) değerleri hesaplanırken 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten (2.285) no.'lu ve (2.293) no.'lu iterasyon denklemleri esas alınarak yazılan bilgisayar programı kullanılması durumunda programın istenilen hassasiyette sonuca yakınsaması için işlem sayısı daha fazla ve çözüm süresi (hesaplama zamanı) daha uzundur. Program sonucu elde edilen 4. hata mertebesinden hassasiyetle Akım Fonksiyonu ve Vortisite değerleri, 2. hata mertebesinden hassasiyetle Akım Fonksiyonu ve Vortisite değerlerine kıyasla nümerik değerler bakımından daha hassas değerlerdir.

3. TEST PROBLEMİ UYGULAMASI VE SONUÇLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

3.1. Kare Kesitli Silindir Etrafından Akan Daimî Sıkıştırılamaz İki-Boyutlu Akış Problemi

Bu çalışma kapsamında geliştirilen ve 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten nümerik formülasyonun işlevselliğinin ve uygulanabilirliğinin test edilmesi amacıyla kare kesitli silindir etrafından akan akış problemi, test problemi olarak seçilmiştir.

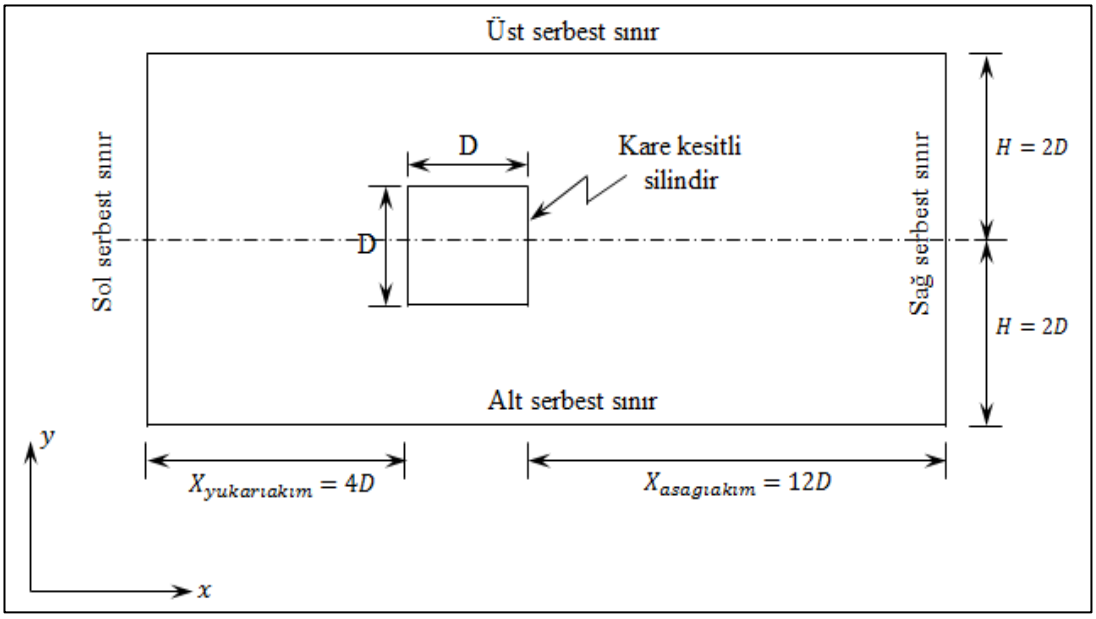
Geliştirilen nümerik formülasyonun iterasyon yöntemlerinden Gauss-Seidel Relaxation (Successive Under/Over Relaxation) Yöntemleri ile uygulanması sonucu kare geometriye sahip bir küt cisim etrafındaki akış problemi, iki-boyutlu akış alanı içerisinde daimî, sıkıştırılamaz ve sıcaklık değişiminden bağımsız kabul edilerek 4. hata mertebesinden hassasiyet ile nümerik olarak çözülmüştür. Çözüm aşamasında, Gauss-Seidel Yöntemi'nden türetilen Gauss-Seidel Relaxation Yöntemi kullanılarak elde edilen 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denklemleri, MATLAB R2010a programlama dilinde yazılan program kodu ile çözülmeye çalışılmıştır.

3.1.1. Kare Kesitli Silindir Etrafındaki Akış Probleminin Tanımı

Kare kesitli silindir, serbest akım içerisinde ve serbet sınırlar arasında (alt ve üst sınırlar serbest sınır olarak göz önüne alınıp bu sınırlar arasında) sabit (durağan) hâlde konumlandırılmıştır. Kare kesitli silindir aynı zamanda alt ve üst sınırlara eşit mesafede ve x-eksenine paralel olarak konumlandırılmıştır. Serbest akım içerisinde bulunan kare kesitli silindir etrafında Newtonian akışkan yani kayma gerilmesi değerinin şekil değişim hızıyla doğrusal olarak değiştiği akışkan olan su göz önüne alınmıştır.

Akışkan partiküllerinin akış alanı içerisinde izlediği hareket yönünü gösteren akım çizgileri, sol yüzey ile kare kesitli silindir arasında yukarı yönde olduğundan dolayı sol yüzey ile kare kesitli silindir arasındaki mesafe yukarıakım mesafesi olarak tanımlanır ve bu mesafe kare kesitli silindirin bir kenar uzunluğunun 4 katı

($X_{yukarıakım} = 4D$) olarak göz önüne alınmıştır. Akım çizgileri, kare kesitli silindir ile sağ yüzey arasında aşağı yönde olduğundan dolayı kare kesitli silindir ile sağ yüzey arasındaki mesafe aşağıakım mesafesi olarak tanımlanır ve bu mesafe kare kesitli silindirin bir kenar uzunluğunun 12 katı ($X_{asagıakım} = 12D$) olarak göz önüne alınmıştır. Kare kesitli silindirin iki-boyutlu akış alanı içerisindeki konumu ve iki-boyutlu akış alanını oluşturan serbest sınırlar, Şekil 3.1'de gösterilmiştir.



Şekil 3.1: Kare kesitli silindirin iki-boyutlu akış alanı içerisindeki konumu ve iki-boyutlu akış alanını oluşturan serbest sınırlar.

3.1.2. Kare Kesitli Silindir Etrafındaki Akış Probleminde Sınır Şartları

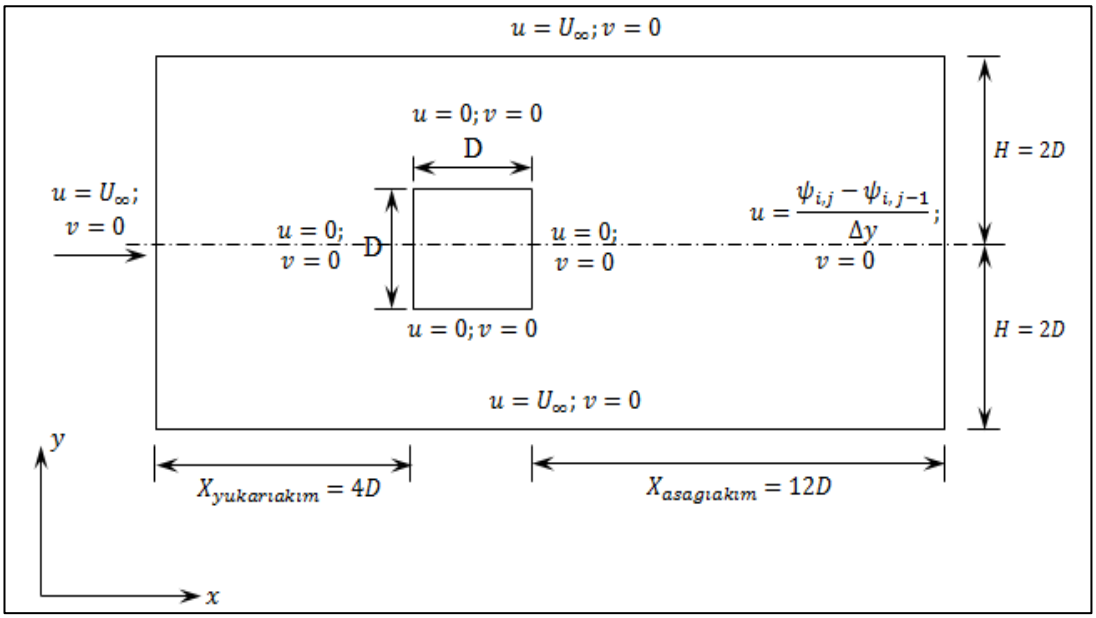
Sol ve sağ sınırlar sırasıyla akışkanın giriş ve çıkış sınırlarıdır (yüzeyleridir) ve bu sınırlar serbest sınırlardır başka bir ifadeyle; sınırlandırılmamış veya bir duvar (katı çeper) ile sabitlenmemiş sınırlardır. Alt ve üst sınırlar da benzer yapıya sahiptir. Sol serbest sınırdaki hız değeri serbest akım hızına eşit ($u = U_\infty$), sağ serbest sınırdaki hız değeri ise $u = \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1}}{\Delta h}$ eşitliği ile hesaplanır ve bu sınırlarda y-ekseni yönündeki hız bileşeni v'nin değeri 0 alınmıştır. Alt ve üst sınırlarda ise akış alanının tam gelişmiş olduğu düşünülerek, x-ekseni yönündeki hız bileşeni u'nun değeri, serbest akım hızı değerine eşit ($u = U_\infty$), y-ekseni yönündeki hız bileşeni v'nin

değeri ise sıfır (0) alınmıştır. Serbest sınırların tamamında göz önüne alınan hız değerleri Tablo 3.1'de verilmiştir.

Tablo 3.1: Serbest akım alanında dikkate alınan sınır şartları.

Alt ve üst serbest sınırlar	:	$u = U_\infty;\ v = 0$
Sol serbest sınır	:	$u = U_\infty;\ v = 0$
Sağ serbest sınır	:	$u = \dfrac{\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1}}{\Delta y};\ v = 0$

Serbest sınırların tamamında göz önüne alınan x-ekseni yönündeki hız bileşeni u'nun değeri, y-ekseni yönündeki hız bileşeni v'nin değeri ve kare kesitli silindir ile serbest sınırlar arasındaki mesafeler Şekil 3.2'de gösterilmiştir.



Şekil 3.2: Kare kesitli silindir etrafındaki akış probleminde hesaplama alanı ve sınır şartları.

Alt ve üst serbest sınırlarda Akım Fonksiyonu değerleri sırasıyla;

$$\psi_{alt\ sınır} = \psi_{i,1} = -\frac{U_\infty}{2} \tag{3.1}$$

$$\psi_{\text{üst sınır}} = \psi_{i,NS_y} = \frac{U_\infty}{2} \tag{3.2}$$

olarak göz önüne alınmıştır ve bu denklemlerde;

- U_∞: Serbest akım hızı
- i: x-ekseni yönündeki ağ yapısı noktaları
- NS_y: y-ekseni yönündeki ağ yapısı nokta sayısı

ifadelerine karşılık gelir.

Sol ve sağ serbest sınırlardaki akım fonksiyonu değerleri belirlenirken x-ekseni yönündeki hız bileşeni u'nun Akım Fonksiyonu cinsinden eşiti olan denklem kullanılır. Sol sınırdaki Akım Fonksiyonu değerleri belirlenirken x-ekseni yönündeki hız bileşeni u'nun Akım Fonksiyonu cinsinden eşiti olan denklem, 2. hata mertebesinden hassasiyetle ileri sonlu fark türev formülü kullanılarak ifade edilir;

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{\Delta y} \tag{3.3}$$

Sol sınırdaki Akım Fonksiyonu değerlerinin belirlenebilmesi amacıyla (3.3) no.'lu denklem, $(1, j)$ noktasına göre düzenlenirse;

$$u = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{1,j} = \frac{\psi_{1,j+1} - \psi_{1,j}}{\Delta y} \tag{3.4}$$

olarak ifade edilir ve bu denklemden $\psi_{1,j+1}$ terimi çekilerek sol sınırdaki Akım Fonksiyonu değerleri;

$$\psi_{sol\ sınır} = \psi_{1,j+1} = u\Delta y + \psi_{1,j} \tag{3.5}$$

eşitliği ile hesaplanır ve bu eşitlikte;

- Δy: y-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe

- $\psi_{1,j}$: Alt sınırdaki Akım Fonksiyonu değerleri

ifadelerine karşılık gelir.

Sağ sınırdaki Akım Fonksiyonu değerleri belirlenirken x-ekseni yönündeki hız bileşeni u'nun Akım Fonksiyonu cinsinden eşiti olan denklem, 2. hata mertebesinden hassasiyetle ileri sonlu fark türev formülü kullanılarak ifade edilir;

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{\Delta y} \tag{3.6}$$

Sağ sınırdaki Akım Fonksiyonu değerlerinin belirlenebilmesi amacıyla (3.6) no.'lu denklem, (NS_y, j) noktasına göre düzenlenirse;

$$u = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{NS_x,j} = \frac{\psi_{NS_y,j+1} - \psi_{NS_y,j}}{\Delta y} \tag{3.7}$$

olarak ifade edilir ve bu denklemden $\psi_{NS_y,j+1}$ terimi çekilerek sağ sınırdaki Akım Fonksiyonu değerleri;

$$\psi_{sağ\ sınır} = \psi_{NS_y,j+1} = u\Delta y + \psi_{NS_y,j} \tag{3.8}$$

eşitliği ile hesaplanır ve bu eşitlikte;

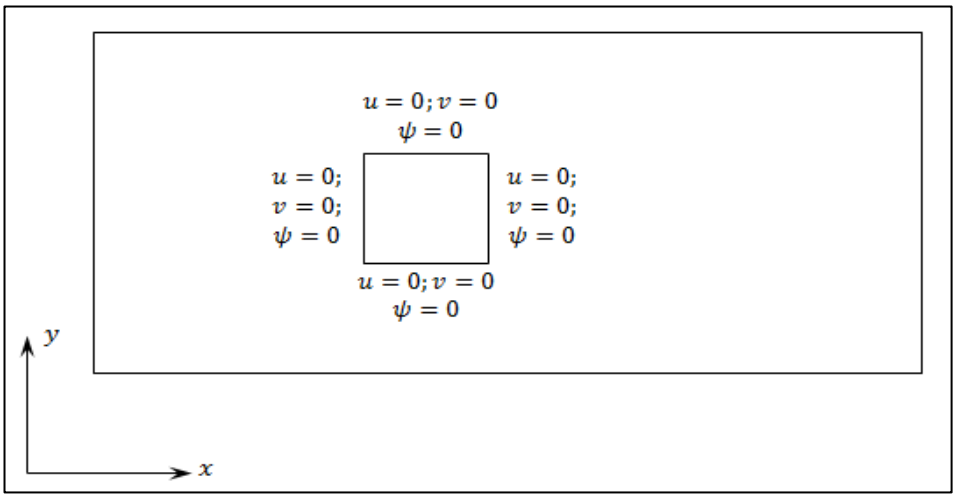
- Δy: y-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe
- $\psi_{NS_y,j}$: Üst sınırdaki Akım Fonksiyonu değerleri

ifadelerine karşılık gelir.

Bütün serbest sınırlar, irrotasyonel (*dönümsüz*) akış bölgesi olduğundan dolayı serbest sınırlarda Vortisite değeri 0'a eşittir. Aynı zamanda serbest sınırların tamamında y-ekseni yönündeki hız bileşeni değerleri de 0'a eşittir.

3.1.2.1. Kare Kesitli Silindir Yüzeylerindeki Akım Fonksiyonu Değerlerinin Belirlenmesi

İki-boyutlu akış alanı içerisinde üst ve alt serbest sınırların orta noktasında konumlandırılmış kare kesitli silindir yüzeyleri (duvarları) sabit yüzeyler olduğundan dolayı bu yüzeylerde kaymama sınır şartı (*no-slip boundary condition*) kullanılmıştır. Buna göre kare kesitli silindir yüzeylerinde hem x-ekseni yönündeki hız bileşeni u, hem de y-ekseni yönündeki hız bileşeni v'nin değeri 0'dır ve buna bağlı olarak yüzeylerdeki Akım Fonksiyonu değeri de sıfır (0) olur. Kare kesitli silindir yüzeylerinin tamamında göz önüne alınan x- ve y-eksenleri yönündeki hız bileşenlerinin değerleri ve Akım Fonksiyonu değerleri Şekil 3.3'te gösterilmiştir.



Şekil 3.3: Kare kesitli silindir yüzeylerindeki hız bileşenleri ve Akım Fonksiyonu değerleri.

Kare kesitli silindir yüzeyindeki Akım Fonksiyonu değerleri Şekil 3.3'te gösterildiği gibi $\psi = 0$'dır; ancak silindir yüzeyindeki Vortisite değerleri 0'dan farklı olup bu değerlerin tespit edilmesinde literatürde kullanılan Thom yöntemi, Stortkuhl Yöntemi vb. farklı yöntemler mevcuttur. Bu çalışmada ise kare kesitli silindir yüzeylerinin tamamında Vortisite değerleri hesaplanırken Thom Yöntemi kullanılmıştır.

3.1.2.2. Kare Kesitli Silindir Yüzeylerindeki Vortisite Değerlerinin Thom Yöntemi ile Belirlenmesi

Kare kesitli silindir yüzeylerinde sınır şartları uygulanırken Thom Yöntemi kullanıldığında sabit yüzeylerin (duvarların) dışında sanki varmış gibi düşünülen hayali noktalar alınarak bu hayali noktaların akış alanı içerisinde alınan sabit yüzeylerin bir içteki yüzeylerinde yer alan noktalara eşit olduğu düşünülür. Başka bir ifadeyle; bu noktaların sınır tabakaya göre simetriği alındığında akış alanı içerisinde ifade edilen noktalara eşit olduğu düşünülür. Bu yöntemde, yüzeylerde bilinen Akım Fonksiyonu'nun diferansiyel değişim değerlerinden faydalanılır [Thom, 1933]. Buna göre; kare kesitli silindirin her bir yüzeyi için Thom Yöntemi uygulanarak yüzeylerdeki Vortisite değerleri bulunur. Bölüm 3.1.2.1.'de ifade edildiği üzere kare kesitli silindir yüzeylerinde hem x-ekseni yönündeki hız bileşeni u, hem de y-ekseni yönündeki hız bileşeni v'nin değeri 0'dır. Dolayısıyla bütün yüzeylerde;

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \tag{3.9}$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{3.10}$$

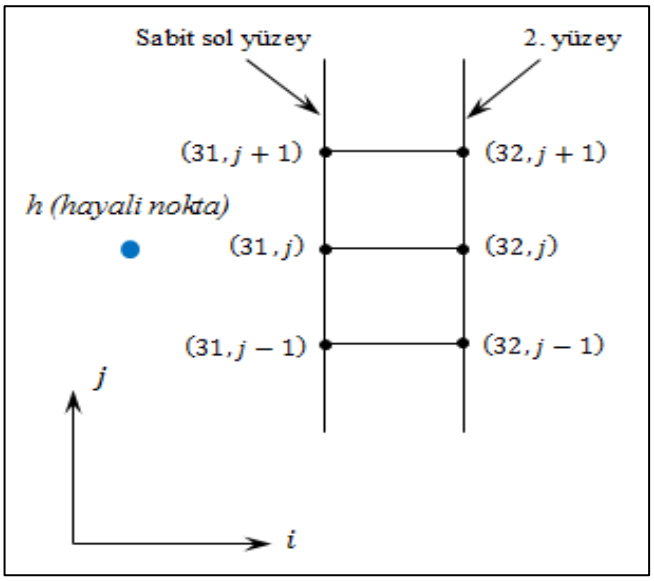
olarak dikkate alınır.

Hesaplama alanında oluşturulan 341x81 boyutundaki ağ yapısında kare kesitli silindirin bulunduğu konumu tanımlayan sol alt, sağ alt, sol üst ve sağ üst köşe noktalarının koordinatları Tablo 3.2'de ifade edilmiştir.

Tablo 3.2: Kare kesitli silindirin köşe noktalarının 341x81 boyutlu ağ yapısındaki koordinatları.

Sol alt köşe koordinatı	:	$(i,j) = (31,31)$
Sağ alt köşe koordinatı	:	$(i,j) = (51,31)$
Sol üst köşe koordinatı	:	$(i,j) = (31,51)$
Sağ üst köşe koordinatı	:	$(i,j) = (51,51)$

Silindirin sol yüzeyindeki Vortisite değerleri hesaplanırken kullanılan denklemin ifade edilmesi aşamasında silindirin sol yüzeyinde kullanılan noktalar, sol yüzeyin sağ tarafında yer alan 2. yüzeyde kullanılan noktalar ile Thom Yöntemi'nde kullanılan hayali noktanın konumu Şekil 3.4'te gösterilmiştir.



Şekil 3.4: Kare kesitli silindirin sol yüzeyindeki Vortisite değerlerinin belirlenmesinde kullanılan noktalar.

Silindirin sol yüzeyindeki Vortisite değerleri hesaplanırken kullanılan denklemin elde edilebilmesi amacıyla öncelikle bölüm 2.2.2.1.'de x-y düzleminde ifade edilen edilen (2.118) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi kullanılır. Bu denklemde (3.9) no.'lu denkleme göre $u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ olduğundan dolayı $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$ alınır. Buna göre (2.118) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi'nde $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$ değeri yerine yazılırsa;

$$\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{3.11}$$

olarak elde edilir. (3.11) no.'lu denklemdeki 2. mertebeden kısmî türev ifadesi, 2. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülü kullanılarak ifade edilirse;

$$\omega_{i,j} = -\left(\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right) \tag{3.12}$$

olarak elde edilir. (3.12) no.'lu denklem, Şekil 3.4'te gösterilen noktalar kullanılarak düzenlenirse;

$$\omega_{31,j} = -\left(\frac{\psi_{32,j} - 2\psi_{31,j} + \psi_h}{\Delta x^2}\right) \tag{3.13}$$

olarak elde edilir. (3.13) no.'lu denklemde $\psi_{31,j}$ ifadesinin değeri 0'a eşittir. Buna göre (3.13) no.'lu denklem yeniden düzenlenirse;

$$\omega_{31,j} = -\left(\frac{\psi_{32,j} + \psi_h}{\Delta x^2}\right) \tag{3.14}$$

olarak elde edilir. (3.14) no.'lu denklemde yer alan Akım Fonksiyonu'nun hayali noktadaki değeri ise yukarıda ifade edilen (3.10) no.'lu denklemin 2. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülü kullanılarak $(31, j)$ noktasına göre sonlu fark denkleminin ifade edilmesi ile bulunur. Buna göre;

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi_{32,j} - \psi_h}{2\Delta x} = 0 \tag{3.15}$$

$$\psi_h = \psi_{32,j} \tag{3.16}$$

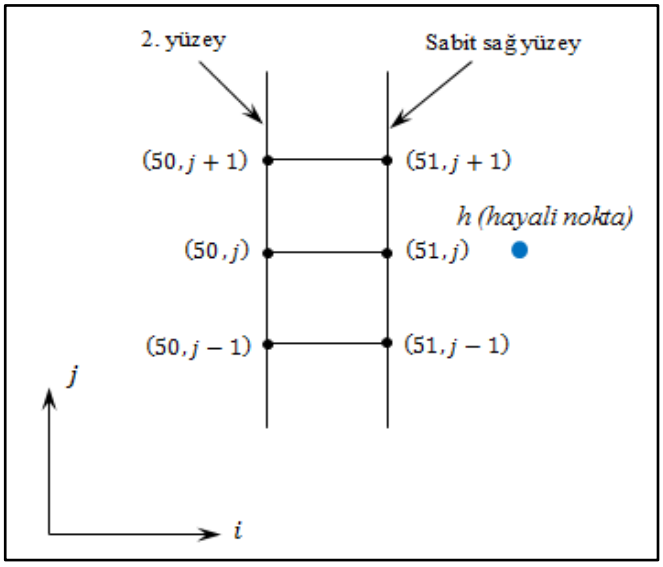
olarak elde edilir ve bu değer, (3.14) no.'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$\omega_{31,j} = -\frac{2\psi_{32,j}}{\Delta x^2} \tag{3.17}$$

olarak silindirin sol yüzeyindeki Vortisite değerleri hesaplanırken kullanılan denklem elde edilir.

Silindirin sağ yüzeyindeki Vortisite değerleri hesaplanırken kullanılan denklemin ifade edilmesi aşamasında silindirin sağ yüzeyinde kullanılan noktalar,

sağ yüzeyin sol tarafında yer alan 2. yüzeyde kullanılan noktalar ile Thom Yöntemi'nde kullanılan hayali noktanın konumu Şekil 3.5'te gösterilmiştir.



Şekil 3.5: Kare kesitli silindirin sağ yüzeyindeki Vortisite değerlerinin belirlenmesinde kullanılan noktalar.

Silindirin sağ yüzeyindeki Vortisite değerleri hesaplanırken kullanılan denklemin elde edilebilmesi amacıyla öncelikle bölüm 2.2.2.1.'de x-y düzleminde ifade edilen edilen (2.118) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi kullanılır ve bu denklemde (3.9) no.'lu denkleme göre $u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ olduğundan dolayı $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$ alınır. Buna göre (2.118) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi'nde $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$ değeri yerine yazılırsa;

$$\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{3.18}$$

olarak elde edilir. (3.18) no.'lu denklemdeki 2. mertebeden kısmî türev ifadesi, 2. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülü kullanılarak ifade edilirse;

$$\omega_{i,j} = -\left(\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right) \tag{3.19}$$

olarak elde edilir. (3.19) no.'lu denklem, Şekil 3.5'te gösterilen noktalar kullanılarak düzenlenirse;

$$\omega_{51,j} = -\left(\frac{\psi_{52,j} - 2\psi_{51,j} + \psi_h}{\Delta x^2}\right) \tag{3.20}$$

olarak elde edilir. (3.20) no.'lu denklemde $\psi_{51,j}$ ifadesinin değeri 0'a eşittir. Buna göre (3.20) no.'lu denklem yeniden düzenlenirse;

$$\omega_{51,j} = -\left(\frac{\psi_{52,j} + \psi_h}{\Delta x^2}\right) \tag{3.21}$$

olarak elde edilir. (3.21) no.'lu denklemde yer alan Akım Fonksiyonu'nun hayali noktadaki değeri ise yukarıda ifade edilen (3.10) no.'lu denklemin 2. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülü kullanılarak $(51, j)$ noktasına göre sonlu fark denkleminin ifade edilmesi ile bulunur. Buna göre;

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi_h - \psi_{50,j}}{2\Delta x} = 0 \tag{3.22}$$

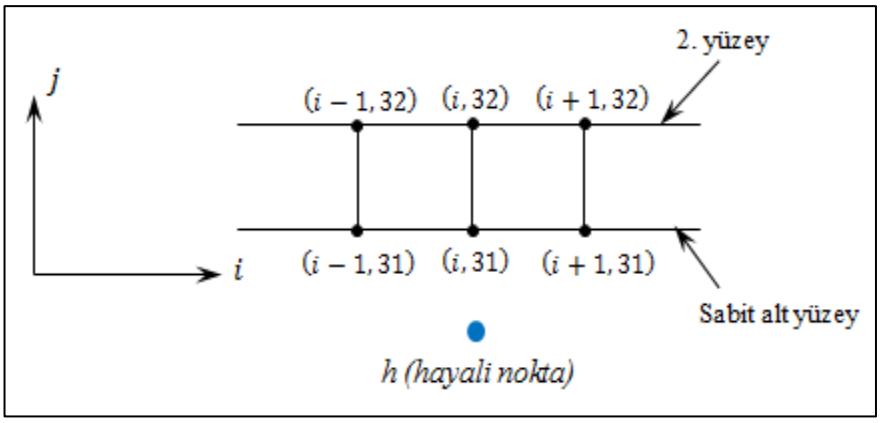
$$\psi_h = \psi_{50,j} \tag{3.23}$$

olarak elde edilir ve bu değer, (3.21) no.'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$\omega_{51,j} = -\frac{2\psi_{50,j}}{\Delta x^2} \tag{3.24}$$

olarak silindirin sağ yüzeyindeki Vortisite değerleri hesaplanırken kullanılan denklem elde edilir.

Silindirin alt yüzeyindeki Vortisite değerleri hesaplanırken kullanılan denklemin ifade edilmesi aşamasında silindirin alt yüzeyinde kullanılan noktalar, alt yüzeyin üstünde yer alan 2. yüzeyde kullanılan noktalar ile Thom Yöntemi'nde kullanılan hayali noktanın konumu Şekil 3.6'da gösterilmiştir.



Şekil 3.6: Kare kesitli silindirin alt yüzeyindeki Vortisite değerlerinin belirlenmesinde kullanılan noktalar.

Silindirin alt yüzeyindeki Vortisite değerleri hesaplanırken kullanılan denklemin elde edilebilmesi amacıyla öncelikle bölüm 2.2.2.1.'de x-y düzleminde ifade edilen (2.118) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi kullanılır ve bu denklemde (3.10) no.'lu denkleme göre $v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ olduğundan dolayı $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$ alınır. Buna göre (2.118) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi'nde $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$ değeri yerine yazılırsa;

$$\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tag{3.25}$$

olarak elde edilir. (3.25) no.'lu denklemdeki 2. mertebeden kısmî türev ifadesi, 2. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülü kullanılarak ifade edilirse;

$$\omega_{i,j} = -\left(\frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right) \tag{3.26}$$

olarak elde edilir. (3.26) no.'lu denklem, Şekil 3.6'da gösterilen noktalar kullanılarak düzenlenirse;

$$\omega_{i,31} = -\left(\frac{\psi_{i,32} - 2\psi_{i,31} + \psi_h}{\Delta y^2}\right) \tag{3.27}$$

olarak elde edilir. (3.27) no.'lu denklemde $\psi_{i,31}$ ifadesinin değeri 0'a eşittir. Buna göre (3.27) no.'lu denklem yeniden düzenlenirse;

$$\omega_{i,31} = -\left(\frac{\psi_{i,32} + \psi_h}{\Delta y^2}\right) \tag{3.28}$$

olarak elde edilir. (3.28) no.'lu denklemde yer alan Akım Fonksiyonu'nun hayali noktadaki değeri ise yukarıda ifade edilen (3.9) no.'lu denklemin 2. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülü kullanılarak $(i, 31)$ noktasına göre sonlu fark denkleminin ifade edilmesi ile bulunur. Buna göre;

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\psi_{i,32} - \psi_h}{2\Delta y} = 0 \tag{3.29}$$

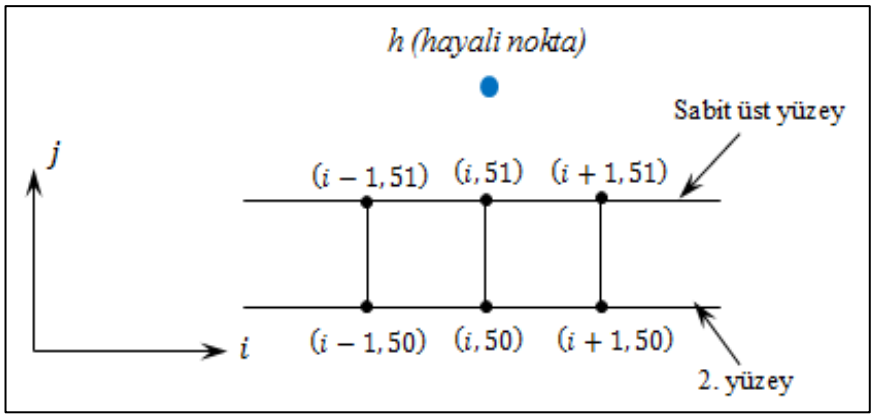
$$\psi_h = \psi_{i,32} \tag{3.30}$$

olarak elde edilir ve bu değer, (3.28) no.'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$\omega_{31,j} = -\frac{2\psi_{i,32}}{\Delta y^2} \tag{3.31}$$

olarak silindirin alt yüzeyindeki Vortisite değerleri hesaplanırken kullanılan denklem elde edilir.

Silindirin üst yüzeyindeki Vortisite değerleri hesaplanırken kullanılan denklemin ifade edilmesi aşamasında silindirin üst yüzeyinde kullanılan noktalar, üst yüzeyin altında yer alan 2. yüzeyde kullanılan noktalar ile Thom Yöntemi'nde kullanılan hayali noktanın konumu Şekil 3.7'de gösterilmiştir.



Şekil 3.7: Kare kesitli silindirin üst yüzeyindeki Vortisite değerlerinin belirlenmesinde kullanılan noktalar.

Silindirin üst yüzeyindeki Vortisite değerleri hesaplanırken kullanılan denklemin elde edilebilmesi amacıyla öncelikle bölüm 2.2.2.1.'de x-y düzleminde ifade edilen (2.118) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi kullanılır ve bu denklemde (3.10) no.'lu denkleme göre $v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ olduğundan dolayı $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$ alınır. Buna göre (2.118) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi'nde $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$ değeri yerine yazılırsa;

$$\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tag{3.32}$$

olarak elde edilir. (3.32) no.'lu denklemdeki 2. mertebeden kısmî türev ifadesi, 2. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülü kullanılarak ifade edilirse;

$$\omega_{i,j} = -\left(\frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right) \tag{3.33}$$

olarak elde edilir. (3.33) no.'lu denklem, Şekil 3.7'de gösterilen noktalar kullanılarak düzenlenirse;

$$\omega_{i,51} = -\left(\frac{\psi_h - 2\psi_{i,51} + \psi_{i,50}}{\Delta y^2}\right) \tag{3.34}$$

olarak elde edilir. (3.34) no.'lu denklemde $\psi_{i,51}$ ifadesinin değeri 0'a eşittir. Buna göre (3.34) no.'lu denklem yeniden düzenlenirse;

$$\omega_{i,51} = -\left(\frac{\psi_h + \psi_{i,50}}{\Delta y^2}\right) \tag{3.35}$$

olarak elde edilir. (3.35) no.'lu denklemde yer alan Akım Fonksiyonu'nun hayali noktadaki değeri ise yukarıda ifade edilen (3.9) no.'lu denklemin 2. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülü kullanılarak $(i, 51)$ noktasına göre sonlu fark denkleminin ifade edilmesi ile bulunur. Buna göre;

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\psi_h - \psi_{i,50}}{2\Delta y} = 0 \tag{3.36}$$

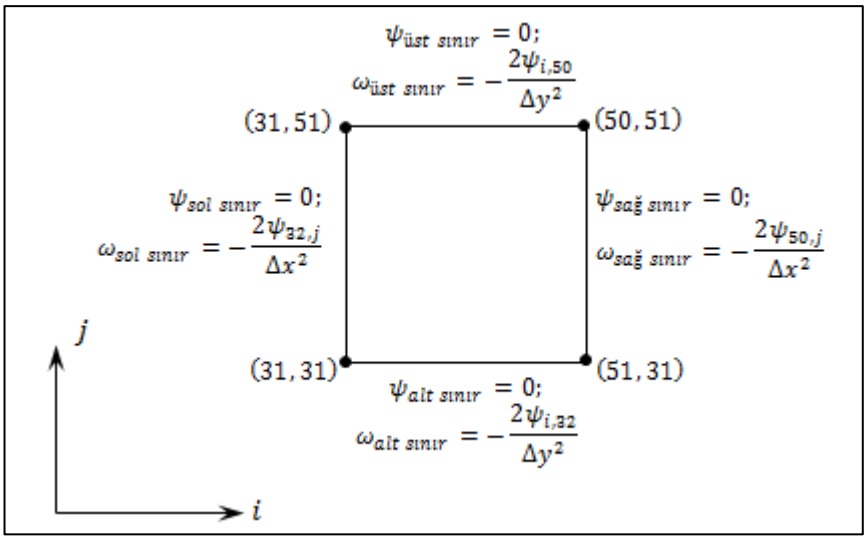
$$\psi_h = \psi_{i,50} \tag{3.37}$$

olarak elde edilir ve bu değer, (3.35) no.'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$\omega_{31,j} = -\frac{2\psi_{i,50}}{\Delta y^2} \tag{3.38}$$

olarak silindirin üst yüzeyindeki Vortisite değerleri hesaplanırken kullanılan denklem elde edilir.

Silindirin her bir yüzeyindeki Akım Fonksiyonu değerleri ile Thom Yöntemi'ne göre Vortisite değerlerinin hesaplanmasında kullanılan denklemler Şekil 3.8'de gösterilmiştir.



Şekil 3.8: Kare kesitli silindir sınırlarında Akım Fonksiyonu değerleri ile Vortisite değerlerini veren denklemler.

Hem serbest sınırlara ait sınır şartları hem de silindir yüzeylerine (kenarlarına) ait sınır şartları oluşturulduktan sonra problemin çözümü için ağ yapısı oluşturulup bu ağ yapısı üzerindeki noktalarda Akım Fonksiyonu ve Vortisite değerleri hesaplanır.

3.1.3. Kare Kesitli Silindir Etrafındaki Akış Probleminin Çözümü ve Sonuçları

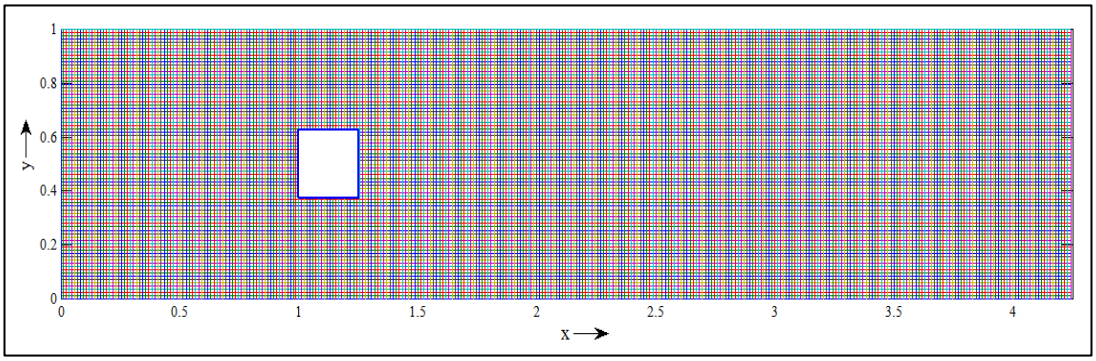
3.1.3.1. Kare Kesitli Silindir Etrafındaki Akış Probleminin Çözümünde Kullanılan Ağ Yapısının Oluşturulması

Bu çalışmada hesaplama alanı içerisinde x-ekseni yönünde 341 nokta, y-ekseni yönünde ise 81 nokta alınarak bölüm 2.2.2.1.'de ifade edilen transformasyon fonksiyonlarının kullanımı ile 341x81 boyutunda homojen (eşit aralıklı) ağ yapısı oluşturulmuştur. 341x81 boyutundaki homojen ağ yapısı Şekil 3.9'da gösterilmiştir.

$$x = \xi - \frac{\lambda}{2\pi}\left(Sin(2\pi\xi)\right) \tag{3.39}$$

$$y = \eta - \frac{\lambda}{2\pi}\left(Sin(2\pi\eta)\right) \tag{3.40}$$

Akım Fonksiyonu ve Vortisite değerlerinin hesaplanacağı noktalar, bölüm 2.2.2.1.'de ifade edilen ve bu bölümde sırasıyla (3.39) ve (3.40) no.'lu denklemler olarak tekrar numaralandırılan fonksiyonların kullanımı ile elde edilen ağ yapısındaki noktalar olup bu noktalar üzerinde Akım Fonksiyonu ve Vortisite değerleri elde edilmeye çalışılmıştır.



Şekil 3.9: Kare kesitli silindir etrafındaki akış probleminin çözümünde kullanılan 341x81 boyutundaki homojen ağ yapısı.

3.1.3.2. Kare Kesitli Silindir Etrafındaki Akış Probleminin Nümerik Çözümünde Kullanılan İterasyon Denklemleri

Bölüm 2.2.8.1. ve bölüm 2.2.8.2.'de ifade edilen sırasıyla Akım Fonksiyonu ve Vortisite'nin Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi kullanılarak elde edilen iteratif çözüm denklemleri kullanılarak her bir ağ yapısı noktasındaki Akım Fonksiyonu ve Vortisite değerleri 4. hata mertebesinden hassasiyetle hesaplanmıştır.

Kare kesitli silindir etrafındaki akış probleminde Akım Fonksiyonu ve Vortisite'nin 4. hata mertebesinden hassasiyetle nümerik değerlerinin elde edilmesinde kullanılan iterasyon denklemleri bölüm 2.2.8.1. ve bölüm 2.2.8.2.'de sırasıyla (2.185) ve (2.293) no.'lu denklemler olarak ifade edilmiştir. Bu denklemlerin birarada görülebilmesi amacıyla bu bölümde sırasıyla (3.41) ve (3.42) no.'lu denklemler olarak tekrar numaralandırılarak aşağıdaki gibi ifade edilmiştir;

$$\psi_{i,j} = w\left(\frac{1}{5(A_{i,j}+B_{i,j})}\right)\left[-\left(\frac{\Delta hC_{i,j}+A_{i,j}}{6}\right)(\psi_{i+2,j})\right.$$
$$+\left(\frac{4(\Delta hC_{i,j}+2A_{i,j})}{3}\right)(\psi_{i+1,j})+\left(\frac{4(-\Delta hC_{i,j}+2A_{i,j})}{3}\right)(\psi_{i-1,j})$$
$$+\left(\frac{\Delta hC_{i,j}-A_{i,j}}{6}\right)(\psi_{i-2,j})-\left(\frac{\Delta hD_{i,j}+B_{i,j}}{6}\right)(\psi_{i,j+2}) \qquad (3.41)$$
$$+\left(\frac{4(\Delta hD_{i,j}+2B_{i,j})}{3}\right)(\psi_{i,j+1})+\left(\frac{4(-\Delta hD_{i,j}+2B_{i,j})}{3}\right)(\psi_{i,j-1})$$
$$\left.+\left(\frac{\Delta hD_{i,j}-B_{i,j}}{6}\right)(\psi_{i,j-2})+(2\Delta h^2)(\omega_{i,j})\right]+(1-w)\psi_{i,j}$$

$$\omega_{i,j} = w\left(\frac{1}{15(A_{i,j}+B_{i,j})}\right)\left[-\left(\frac{\Delta hC_{i,j}+A_{i,j}}{2}\right)(\omega_{i+2,j})\right.$$
$$+(4\Delta hC_{i,j}+8A_{i,j})(\omega_{i+1,j})+(-4\Delta hC_{i,j}+8A_{i,j})(\omega_{i-1,j})$$
$$+\left(\frac{\Delta hC_{i,j}-A_{i,j}}{2}\right)(\omega_{i-2,j})-\left(\frac{\Delta hD_{i,j}+B_{i,j}}{2}\right)(\omega_{i,j+2})$$
$$+(4\Delta hD_{i,j}+8B_{i,j})(\omega_{i,j+1})+(-4\Delta hD_{i,j}+8B_{i,j})(\omega_{i,j-1})$$
$$+\left(\frac{\Delta hD_{i,j}-B_{i,j}}{2}\right)(\omega_{i,j-2})$$
$$-\frac{Re}{24}E_{i,j}(-\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2})(-\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j})$$
$$-\frac{Re}{3}E_{i,j}(-\psi_{i,j+2}+\psi_{i,j-2})(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}) \qquad (3.42)$$
$$-\frac{Re}{3}E_{i,j}(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1})(-\omega_{i+2,j}+\omega_{i-2,j})$$
$$-\frac{8Re}{3}E_{i,j}(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1})(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j})$$
$$+\frac{Re}{24}E_{i,j}(-\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j})(-\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2})$$
$$+\frac{Re}{3}E_{i,j}(-\psi_{i+2,j}+\psi_{i-2,j})(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1})$$
$$+\frac{Re}{3}E_{i,j}(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j})(-\omega_{i,j+2}+\omega_{i,j-2})$$
$$\left.+\frac{8Re}{3}E_{i,j}(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j})(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1})\right]+(1-w)\omega_{i,j}$$

3.1.3.2.1. Kare Kesitli Silindir Etrafındaki Akış Probleminin Nümerik Çözümünde Kullanılan İterasyon Denklemlerinde Yer Alan Sabit Toplamların Analitik Çözümleri

Bölüm 3.1.3.2.'de ifade edilen iterasyon denklemlerinde yer alan $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$, $D_{i,j}$ ve $E_{i,j}$ sabit toplamlarının analitik değerlerini başka bir ifadeyle analitik çözümlerini veren denklemlerin ifade edilmesi aşamasında bölüm 3.1.3.1.'de ifade edilen (3.39) ve (3.40) no.'lu denklemler olarak ifade edilen transformasyon fonksiyonları kullanılır.

Bölüm 2.2.5.2.'de ifade edilen A, B, C, D ve E sabit toplamlarında yer alan $\frac{\partial \xi}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ ve $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ terimlerinin değerleri sıfır (0) olup bu değerler, sabit toplamlara karşılık gelen denklemlerde yazılır ve herhangi bir ağ yapısı noktasındaki sabit toplam değerini ifade etmek üzere $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$, $D_{i,j}$ ve $E_{i,j}$ terimleri kullanılarak sabit toplamlara karşılık gelen ifadeler yeniden düzenlenirse;

$$A_{i,j} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \tag{3.43}$$

$$B_{i,j} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \tag{3.44}$$

$$C_{i,j} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{3.45}$$

$$D_{i,j} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \tag{3.46}$$

$$E_{i,j} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{3.47}$$

olarak ifade edilir. $A_{i,j}$ sabit toplamının analitik değerlerinin hesaplanmasında kullanılan genel ifade 3 aşamada elde edilir. 1. aşamada (3.39) no.'lu denklemin ξ bağımsız değişkenine göre 1. mertebeden kısmî türevi alınırsa;

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 - \frac{\lambda}{2\pi}(2\pi)Cos(2\pi\xi) \tag{3.48}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 - \lambda Cos(2\pi\xi) \tag{3.49}$$

olarak elde edilir. 2. aşamada bileşik fonksiyonların türevleri hesaplanırken kullanılan zincir kuralı uygulanarak $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ kısmî türevine karşılık gelen ifade elde edilmeye çalışılır;

$$\frac{\partial \ ...}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \ ...}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \ ...}{\partial \xi} \tag{3.50}$$

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \xi} \tag{3.51}$$

(3.51) no.'lu denklemde $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ ifadesinin değeri 0'a eşittir. Buna göre (3.51) no.'lu denklemde $\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$ yazılırsa;

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} \tag{3.52}$$

olarak elde edilir. (3.52) no.'lu denklemden $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ terimi çekilerek denklem yeniden düzenlenirse;

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi}} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^{-1} \tag{3.53}$$

olarak elde edilir ve bu denklemde yer alan $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ terimine karşılık gelen (3.49) no.'lu denklem yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^{-1} = \frac{1}{1 - \lambda Cos(2\pi\xi)} \tag{3.54}$$

olarak $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ kısmî türevine karşılık gelen ifade elde edilir. 3. aşamada ise $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ kısmî türevine karşılık gelen (3.54) no.'lu denklemin karesi alınırsa;

$$A_{i,j} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{1}{\left(1 - \lambda Cos\left(2\pi\xi_{i,j}\right)\right)}\right)^2 \tag{3.55}$$

olarak seçilen herhangi bir λ ve ξ değerleri için $A_{i,j}$ sabit toplamının analitik değerlerinin hesaplanmasında kullanılan genel ifade elde edilir.

$B_{i,j}$ sabit toplamının analitik değerlerinin hesaplanmasında kullanılan genel ifade 3 aşamada elde edilir. 1. aşamada (3.40) no.'lu denklemin η bağımsız değişkenine göre 1. mertebeden kısmî türevi alınırsa;

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = 1 - \frac{\lambda}{2\pi}(2\pi)Cos(2\pi\eta) \tag{3.56}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = 1 - \lambda Cos(2\pi\eta) \tag{3.57}$$

olarak elde edilir. 2. aşamada bileşik fonksiyonların türevleri hesaplanırken kullanılan zincir kuralı uygulanarak $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ kısmî türevine karşılık gelen ifade elde edilmeye çalışılır;

$$\frac{\partial \ldots}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \ldots}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \ldots}{\partial \eta} \tag{3.58}$$

$$\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \tag{3.59}$$

(3.59) no.'lu denklemde $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ ifadesinin değeri 0'a eşittir. Buna göre (3.59) no.'lu denklemde $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ yazılırsa;

$$\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \tag{3.60}$$

olarak elde edilir. (3.60) no.'lu denklemden $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ terimi çekilerek denklem yeniden düzenlenirse;

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial \eta}} = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^{-1} \tag{3.61}$$

olarak elde edilir ve bu denklemde yer alan $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ terimine karşılık gelen (3.57) no.'lu denklem yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^{-1} = \frac{1}{1 - \lambda Cos(2\pi\eta)} \tag{3.62}$$

olarak $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ kısmî türevine karşılık gelen ifade elde edilir. 3. aşamada ise $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ kısmî türevine karşılık gelen (3.62) no.'lu denklemin karesi alınırsa;

$$B_{i,j} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{1}{\left(1 - \lambda Cos\left(2\pi\eta_{i,j}\right)\right)}\right)^2 \tag{3.63}$$

olarak seçilen herhangi bir λ ve η değerleri için $B_{i,j}$ sabit toplamının analitik değerlerinin hesaplanmasında kullanılan genel ifade elde edilir.

$C_{i,j}$ sabit toplamının analitik değerlerinin hesaplanmasında kullanılan genel ifade 3 aşamada elde edilir. 1. aşamada $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ kısmî türevine karşılık gelen (3.54) no.'lu denklemin ξ bağımsız değişkenine göre 2. mertebeden kısmî türevi alınırsa;

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{1-\lambda Cos(2\pi\xi)}\right) \tag{3.64}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\frac{\partial \xi}{\partial x}\left(\frac{2\pi\lambda Sin(2\pi\xi)}{\left(1-\lambda Cos(2\pi\xi)\right)^2}\right) \tag{3.65}$$

olarak elde edilir. 2. aşamada (3.65) no.'lu denklemde yer alan $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ terimine karşılık gelen (3.54) no.'lu denklem yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\left(\frac{1}{1-\lambda Cos(2\pi\xi)}\right) \times \left(\frac{2\pi\lambda Sin(2\pi\xi)}{\left(1-\lambda Cos(2\pi\xi)\right)^2}\right) \tag{3.66}$$

olarak elde edilir. 3. aşamada (3.66) no.'lu denklem, gerekli matematiksel işlemler yapılarak yeniden düzenlenirse;

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\frac{2\pi\lambda Sin(2\pi\xi)}{\left(1-\lambda Cos(2\pi\xi)\right)^3} \tag{3.67}$$

olarak elde edilir. Yukarıda da ifade edildiği üzere $C_{i,j}$ sabit toplamı $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$'ye eşit olduğundan dolayı;

$$C_{i,j} = -\frac{2\pi\lambda Sin\left(2\pi\xi_{i,j}\right)}{\left(1-\lambda Cos\left(2\pi\xi_{i,j}\right)\right)^3} \tag{3.68}$$

olarak seçilen herhangi bir λ ve ξ değerleri için $C_{i,j}$ sabit toplamının analitik değerlerinin hesaplanmasında kullanılan genel ifade elde edilir.

$D_{i,j}$ sabit toplamının analitik değerlerinin hesaplanmasında kullanılan genel ifade 3 aşamada elde edilir. 1. aşamada $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ kısmî türevine karşılık gelen (3.62) no.'lu denklemin η bağımsız değişkenine göre 2. mertebeden kısmî türevi alınırsa;

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) = \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) = \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{1-\lambda Cos(2\pi\eta)}\right) \tag{3.69}$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{1-\lambda Cos(2\pi\eta)}\right) \tag{3.70}$$

olarak elde edilir. 2. aşamada (3.70) no.'lu denklemde yer alan $\frac{\partial\eta}{\partial y}$ terimine karşılık gelen (3.62) no.'lu denklem yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = -\left(\frac{1}{1-\lambda Cos(2\pi\eta)}\right)\times\left(\frac{2\pi\lambda Sin(2\pi\eta)}{\left(1-\lambda Cos(2\pi\eta)\right)^2}\right) \tag{3.71}$$

olarak elde edilir. 3. aşamada (3.71) no.'lu denklem, gerekli matematiksel işlemler yapılarak yeniden düzenlenirse;

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = -\frac{2\pi\lambda Sin(2\pi\eta)}{\left(1-\lambda Cos(2\pi\eta)\right)^3} \tag{3.72}$$

olarak elde edilir. Yukarıda da ifade edildiği üzere $D_{i,j}$ sabit toplamı $\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}$'ye eşit olduğundan dolayı;

$$D_{i,j} = -\frac{2\pi\lambda Sin\left(2\pi\eta_{i,j}\right)}{\left(1-\lambda Cos\left(2\pi\eta_{i,j}\right)\right)^3} \tag{3.73}$$

olarak seçilen herhangi bir λ ve η değerleri için $D_{i,j}$ sabit toplamının analitik değerlerinin hesaplanmasında kullanılan genel ifade elde edilir.

$E_{i,j}$ sabit toplamının analitik değerlerinin hesaplanmasında kullanılan genel ifadenin elde edilmesi amacıyla yukarıda elde edilen $\frac{\partial\xi}{\partial\eta}$ kısmî türevine karşılık gelen (3.54) no.'lu denklem ile $\frac{\partial\eta}{\partial y}$ kısmî türevine karşılık gelen (3.62) no.'lu denklem çarpılırsa;

$$E_{i,j} = \left(\frac{1}{\left(1 - \lambda Cos\left(2\pi\xi_{i,j}\right)\right)} \right) \times \left(\frac{1}{\left(1 - \lambda Cos\left(2\pi\eta_{i,j}\right)\right)} \right) \tag{3.74}$$

olarak seçilen herhangi bir λ, ξ ve η değerleri için $E_{i,j}$ sabit toplamının analitik değerlerinin hesaplanmasında kullanılan genel ifade elde edilir.

3.1.3.3. Kare Kesitli Silindir Etrafındaki Akış Probleminin Nümerik Sonuçları

Bölüm 3.1.3.2.'de ifade edilen Akım Fonksiyonu ve Vortisite'nin 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denklemleri kullanılarak MATLAB R2010a programlama dilinde yazılan bilgisayar programı ile Akım Fonksiyonu ve Vortisite değerleri 4. hata mertebesinden hassasiyetle elde edilmiştir. Primer problem parametrelerinden Reynolds Sayısı (Re) değerleri 100, 300, 1000, 10000 ve 20000, serbest akım hızı (U_∞) değerleri 0.02, 0.04, 0.046, 0.07, 0.09, 0.093, 0.7, 0.9, 0.93, 1.0, 2.0, 2.29, 7.0, 9.0 ve 9.3 alınarak oluşturulan toplam 75 farklı (Re, U_∞) çifti için program çalıştırılmıştır. Böylece toplam 75 sayıda deneme yapılarak elde edilen Akım Fonksiyonu (ψ) ve Vortisite (ω) değerleri 4. hata mertebesinden hassasiyetle elde edilmiştir ve elde edilen nümerik değerler Tablo 3.3'te verilmiştir. Tablo 3.3'te Akım Fonksiyonu ve Vortisite değerlerine karşılık gelen bazı nümerik değerler $0/0$ veya ∞/∞ gibi belirsiz değerlerdir ve bu belirsiz değerler 30 farklı (Re, U_∞) çifti için oluşmaktadır. Belirsiz değerlerin oluştuğu (Re, U_∞) çiftleri Tablo 3.3'ten de görüleceği üzere $(300, 7.0)$, $(300, 9.0)$, $(300, 9.3)$, $(1000, 1.0)$, $(1000, 2.0)$, $(1000, 2.29)$ $(1000, 7.0)$, $(1000, 9.0)$, $(1000, 9.3)$, $(10000, 0.7)$, $(10000, 0.9)$, $(10000, 0.93)$, $(10000, 1.0)$, $(10000, 2.0)$, $(10000, 2.29)$, $(10000, 7.0)$, $(10000, 9.0)$, $(10000, 9.3)$, $(20000, 0.07)$, $(20000, 0.09)$, $(20000, 0.093)$, $(20000, 0.7)$, $(20000, 0.9)$, $(20000, 0.93)$, $(20000, 1.0)$, $(20000, 2.0)$, $(20000, 2.29)$, $(20000, 7.0)$, $(20000, 9.0)$ ve $(20000, 9.3)$ çiftleridir. Bu (Re, U_∞) çiftleri için iterasyon denklemlerinin çözülmesi sonucu oluşan Akım Fonksiyonu ve Vortisite değişkenlerine ait belirsiz değerler, Tablo 3.3'te "$-$" sembolü ile gösterilmiştir.

2. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denklemleri ile çözüm sonucu elde edilen edilen nümerik değerler Tablo 3.4'te verilmiştir. Tablo

3.4'te Akım Fonksiyonu ve Vortisite değerlerine karşılık gelen bazı nümerik değerler $0/0$ veya ∞/∞ gibi belirsiz değerlerdir ve bu belirsiz değerler 38 farklı (Re, U_∞) çifti için oluşmaktadır. Belirsiz değerlerin oluştuğu (Re, U_∞) çiftleri Tablo 3.4'ten de görüleceği üzere $(100, 9.0)$, $(100, 9.3)$, $(300, 7.0)$, $(300, 9.0)$, $(300, 9.3)$, $(1000, 0.9)$, $(1000, 0.93)$, $(1000, 1.0)$, $(1000, 2.0)$, $(1000, 2.29)$ $(1000, 7.0)$, $(1000, 9.0)$, $(1000, 9.3)$, $(10000, 0.09)$, $(10000, 0.093)$, $(10000, 0.7)$, $(10000, 0.9)$, $(10000, 0.93)$, $(10000, 1.0)$, $(10000, 2.0)$, $(10000, 2.29)$, $(10000, 7.0)$, $(10000, 9.0)$, $(10000, 9.3)$, $(20000, 0.04)$, $(20000, 0.046)$, $(20000, 0.07)$, $(20000, 0.09)$, $(20000, 0.093)$, $(20000, 0.7)$, $(20000, 0.9)$, $(20000, 0.93)$, $(20000, 1.0)$, $(20000, 2.0)$, $(20000, 2.29)$, $(20000, 7.0)$, $(20000, 9.0)$ ve $(20000, 9.3)$ çiftleridir. Bu (Re, U_∞) çiftleri için iterasyon denklemlerinin çözülmesi sonucu oluşan Akım Fonksiyonu ve Vortisite değişkenlerine ait belirsiz değerler, Tablo 3.4'te "$-$" sembolü ile gösterilmiştir.

Yukarıda da ifade edildiği üzere 2. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denklemleri ile çözümde 38 farklı (Re, U_∞) çifti için Akım Fonksiyonu ve Vortisite değişkenlerine ait $0/0$ veya ∞/∞ gibi belirsiz değerler oluşurken 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denklemleri ile çözümde ise 30 farklı (Re, U_∞) çifti için Akım Fonksiyonu ve Vortisite değişkenlerine ait $0/0$ veya ∞/∞ gibi belirsiz değerler oluşmaktadır. Dolayısıyla 4. hata mertebesinden nümerik formülasyon ile çözümde 2. hata mertebesinden nümerik formülasyon ile çözüme kıyasla Akım Fonksiyonu ve Vortisite değişkenlerine ait reel değerler elde edilen (Re, U_∞) çiftinin artığı gözlemlenmiştir.

Tablo 3.3: Reynolds Sayısı ve serbest akım hızının farklı değerlerinde elde edilen Akım Fonksiyonu ve Vortisite'nin 4. hata mertebesinden nümerik değerleri.

Serbest Akım Hızı Değerleri ($U\ [m/s]$)	Reynolds Sayısı Değerleri (Re)				
	100	300	1000	10000	20000
0.02	$\psi_{min.} = -0.01$ $\psi_{max.} = 0.01$ $\omega_{min.} = -1.1303$ $\omega_{max.} = 1.1303$	$\psi_{min.} = -0.01$ $\psi_{max.} = 0.01$ $\omega_{min.} = -1.2173$ $\omega_{max.} = 1.2173$	$\psi_{min.} = -0.01$ $\psi_{max.} = 0.01$ $\omega_{min.} = -1.5292$ $\omega_{max.} = 1.5292$	$\psi_{min.} = -0.01$ $\psi_{max.} = 0.01$ $\omega_{min.} = -2.61$ $\omega_{max.} = 2.61$	$\psi_{min.} = -0.01$ $\psi_{max.} = 0.01$ $\omega_{min.} = -2.5579$ $\omega_{max.} = 2.5579$
0.04	$\psi_{min.} = -0.02$ $\psi_{max.} = 0.02$ $\omega_{min.} = -2.3465$ $\omega_{max.} = 2.3465$	$\psi_{min.} = -0.02$ $\psi_{max.} = 0.02$ $\omega_{min.} = -2.7059$ $\omega_{max.} = 2.7059$	$\psi_{min.} = -0.02$ $\psi_{max.} = 0.02$ $\omega_{min.} = -3.7724$ $\omega_{max.} = 3.7724$	$\psi_{min.} = -0.02$ $\psi_{max.} = 0.02$ $\omega_{min.} = -5.1157$ $\omega_{max.} = 5.1157$	$\psi_{min.} = -0.02$ $\psi_{max.} = 0.02$ $\omega_{min.} = -4.7026$ $\omega_{max.} = 4.7026$
0.046	$\psi_{min.} = -0.023$ $\psi_{max.} = 0.023$ $\omega_{min.} = -2.7286$ $\omega_{max.} = 2.7286$	$\psi_{min.} = -0.023$ $\psi_{max.} = 0.023$ $\omega_{min.} = -3.2052$ $\omega_{max.} = 3.2052$	$\psi_{min.} = -0.023$ $\psi_{max.} = 0.023$ $\omega_{min.} = -4.5284$ $\omega_{max.} = 4.5284$	$\psi_{min.} = -0.023$ $\psi_{max.} = 0.023$ $\omega_{min.} = -5.81$ $\omega_{max.} = 5.81$	$\psi_{min.} = -0.023$ $\psi_{max.} = 0.023$ $\omega_{min.} = -5.2628$ $\omega_{max.} = 5.2628$
0.07	$\psi_{min.} = -0.035$ $\psi_{max.} = 0.035$ $\omega_{min.} = -4.3390$ $\omega_{max.} = 4.3390$	$\psi_{min.} = -0.035$ $\psi_{max.} = 0.035$ $\omega_{min.} = -5.4255$ $\omega_{max.} = 5.4255$	$\psi_{min.} = -0.035$ $\psi_{max.} = 0.035$ $\omega_{min.} = -7.7619$ $\omega_{max.} = 7.7619$	$\psi_{min.} = -0.035$ $\psi_{max.} = 0.035$ $\omega_{min.} = -8.1148$ $\omega_{max.} = 8.1148$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
0.09	$\psi_{min.} = -0.045$ $\psi_{max.} = 0.045$ $\omega_{min.} = -5.7820$ $\omega_{max.} = 5.7820$	$\psi_{min.} = -0.045$ $\psi_{max.} = 0.045$ $\omega_{min.} = -7.5119$ $\omega_{max.} = 7.5119$	$\psi_{min.} = -0.045$ $\psi_{max.} = 0.045$ $\omega_{min.} = -10.5943$ $\omega_{max.} = 10.5943$	$\psi_{min.} = -0.045$ $\psi_{max.} = 0.045$ $\omega_{min.} = -10.3435$ $\omega_{max.} = 10.3435$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$

Tablo 3.3: Devamı.

Serbest Akım Hızı Değerleri ($U\ [m/s]$)	Reynolds Sayısı Değerleri (Re)				
	100	300	1000	10000	20000
0.093	$\psi_{min.} = -0.0465$ $\psi_{max.} = 0.0465$ $\omega_{min.} = -6.0063$ $\omega_{max.} = 6.0063$	$\psi_{min.} = -0.0465$ $\psi_{max.} = 0.0465$ $\omega_{min.} = -7.8406$ $\omega_{max.} = 7.8406$	$\psi_{min.} = -0.0465$ $\psi_{max.} = 0.0465$ $\omega_{min.} = -11.0240$ $\omega_{max.} = 11.0240$	$\psi_{min.} = -0.0465$ $\psi_{max.} = 0.0465$ $\omega_{min.} = -10.6165$ $\omega_{max.} = 10.6165$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
0.7	$\psi_{min.} = -0.35$ $\psi_{max.} = 0.35$ $\omega_{min.} = -77.6189$ $\omega_{max.} = 77.6189$	$\psi_{min.} = -0.35$ $\psi_{max.} = 0.35$ $\omega_{min.} = -91.4968$ $\omega_{max.} = 91.4968$	$\psi_{min.} = -0.35$ $\psi_{max.} = 0.35$ $\omega_{min.} = -84.1183$ $\omega_{max.} = 84.1183$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
0.9	$\psi_{min.} = -0.45$ $\psi_{max.} = 0.45$ $\omega_{min.} = -105.9428$ $\omega_{max.} = 105.9428$	$\psi_{min.} = -0.45$ $\psi_{max.} = 0.45$ $\omega_{min.} = -117.6699$ $\omega_{max.} = 117.6699$	$\psi_{min.} = -0.45$ $\psi_{max.} = 0.45$ $\omega_{min.} = -103.4349$ $\omega_{max.} = 103.4349$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
0.93	$\psi_{min.} = -0.465$ $\psi_{max.} = 0.465$ $\omega_{min.} = -110.2397$ $\omega_{max.} = 110.2397$	$\psi_{min.} = -0.465$ $\psi_{max.} = 0.465$ $\omega_{min.} = -121.4838$ $\omega_{max.} = 121.4838$	$\psi_{min.} = -0.465$ $\psi_{max.} = 0.465$ $\omega_{min.} = -106.1645$ $\omega_{max.} = 106.1645$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
1.0	$\psi_{min.} = -0.5$ $\psi_{max.} = 0.5$ $\omega_{min.} = -120.2892$ $\omega_{max.} = 120.2892$	$\psi_{min.} = -0.5$ $\psi_{max.} = 0.5$ $\omega_{min.} = -188.5509$ $\omega_{max.} = 188.5509$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$

Tablo 3.3: Devamı.

Serbest Akım Hızı Değerleri ($U\ [m/s]$)	Reynolds Sayısı Değerleri (Re)				
	100	300	1000	10000	20000
2.0	$\psi_{min.} = -1.0$ $\psi_{max.} = 1.0$ $\omega_{min.} = -261.002$ $\omega_{max.} = 261.002$	$\psi_{min.} = -1.0$ $\psi_{max.} = 1.0$ $\omega_{min.} = -245.4223$ $\omega_{max.} = 245.4223$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
2.29	$\psi_{min.} = -1.145$ $\psi_{max.} = 1.145$ $\omega_{min.} = -299.7956$ $\omega_{max.} = 299.7956$	$\psi_{min.} = -1.145$ $\psi_{max.} = 1.145$ $\omega_{min.} = -275.9508$ $\omega_{max.} = 275.9508$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
7.0	$\psi_{min.} = -3.5$ $\psi_{max.} = 3.5$ $\omega_{min.} = -841.1827$ $\omega_{max.} = 841.1827$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
9.0	$\psi_{min.} = -4.5$ $\psi_{max.} = 4.5$ $\omega_{min.} = -1.0343 \times 10^3$ $\omega_{max.} = 1.0343 \times 10^3$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
9.3	$\psi_{min.} = -4.65$ $\psi_{max.} = 4.65$ $\omega_{min.} = -1.0616 \times 10^3$ $\omega_{max.} = 1.0616 \times 10^3$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$

Tablo 3.4: Reynolds Sayısı ve serbest akım hızının farklı değerlerinde elde edilen Akım Fonksiyonu ve Vortisite'nin 2. hata mertebesinden nümerik değerleri.

Serbest Akım Hızı Değerleri ($U\ [m/s]$)	Reynolds Sayısı Değerleri (Re)				
	100	300	1000	10000	20000
0.02	$\psi_{min.} = -0.01$ $\psi_{max.} = 0.01$ $\omega_{min.} = -1.3421$ $\omega_{max.} = 1.3421$	$\psi_{min.} = -0.01$ $\psi_{max.} = 0.01$ $\omega_{min.} = -1.4406$ $\omega_{max.} = 1.4406$	$\psi_{min.} = -0.01$ $\psi_{max.} = 0.01$ $\omega_{min.} = -1.8048$ $\omega_{max.} = 1.8048$	$\psi_{min.} = -0.01$ $\psi_{max.} = 0.01$ $\omega_{min.} = -3.5311$ $\omega_{max.} = 3.5311$	$\psi_{min.} = -0.01$ $\psi_{max.} = 0.01$ $\omega_{min.} = -4.0418$ $\omega_{max.} = 4.0418$
0.04	$\psi_{min.} = -0.02$ $\psi_{max.} = 0.02$ $\omega_{min.} = -2.7807$ $\omega_{max.} = 2.7807$	$\psi_{min.} = -0.02$ $\psi_{max.} = 0.02$ $\omega_{min.} = -3.1958$ $\omega_{max.} = 3.1958$	$\psi_{min.} = -0.02$ $\psi_{max.} = 0.02$ $\omega_{min.} = -4.4579$ $\omega_{max.} = 4.4579$	$\psi_{min.} = -0.02$ $\psi_{max.} = 0.02$ $\omega_{min.} = -8.0836$ $\omega_{max.} = 8.0836$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
0.046	$\psi_{min.} = -0.023$ $\psi_{max.} = 0.023$ $\omega_{min.} = -3.2321$ $\omega_{max.} = 3.2321$	$\psi_{min.} = -0.023$ $\psi_{max.} = 0.023$ $\omega_{min.} = -3.7847$ $\omega_{max.} = 3.7847$	$\psi_{min.} = -0.023$ $\psi_{max.} = 0.023$ $\omega_{min.} = -5.3606$ $\omega_{max.} = 5.3606$	$\psi_{min.} = -0.023$ $\psi_{max.} = 0.023$ $\omega_{min.} = -9.4972$ $\omega_{max.} = 9.4972$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
0.07	$\psi_{min.} = -0.035$ $\psi_{max.} = 0.035$ $\omega_{min.} = -5.1321$ $\omega_{max.} = 5.1321$	$\psi_{min.} = -0.035$ $\psi_{max.} = 0.035$ $\omega_{min.} = -6.4033$ $\omega_{max.} = 6.4033$	$\psi_{min.} = -0.035$ $\psi_{max.} = 0.035$ $\omega_{min.} = -9.3076$ $\omega_{max.} = 9.3076$	$\psi_{min.} = -0.035$ $\psi_{max.} = 0.035$ $\omega_{min.} = -15.2009$ $\omega_{max.} = 15.2009$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
0.09	$\psi_{min.} = -0.045$ $\psi_{max.} = 0.045$ $\omega_{min.} = -6.8335$ $\omega_{max.} = 6.8335$	$\psi_{min.} = -0.045$ $\psi_{max.} = 0.045$ $\omega_{min.} = -8.8644$ $\omega_{max.} = 8.8644$	$\psi_{min.} = -0.045$ $\psi_{max.} = 0.045$ $\omega_{min.} = -12.9033$ $\omega_{max.} = 12.9033$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$

Tablo 3.4: Devamı.

Serbest Akım Hızı Değerleri ($U\ [m/s]$)	Reynolds Sayısı Değerleri (Re)				
	100	300	1000	10000	20000
0.093	$\psi_{min.} = -0.0465$ $\psi_{max.} = 0.0465$ $\omega_{min.} = -7.0980$ $\omega_{max.} = 7.0980$	$\psi_{min.} = -0.0465$ $\psi_{max.} = 0.0465$ $\omega_{min.} = -9.2523$ $\omega_{max.} = 9.2523$	$\psi_{min.} = -0.0465$ $\psi_{max.} = 0.0465$ $\omega_{min.} = -13.4613$ $\omega_{max.} = 13.4613$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
0.7	$\psi_{min.} = -0.35$ $\psi_{max.} = 0.35$ $\omega_{min.} = -93.0756$ $\omega_{max.} = 93.0756$	$\psi_{min.} = -0.35$ $\psi_{max.} = 0.35$ $\omega_{min.} = -124.9483$ $\omega_{max.} = 124.9483$	$\psi_{min.} = -0.35$ $\psi_{max.} = 0.35$ $\omega_{min.} = -152.0087$ $\omega_{max.} = 152.0087$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
0.9	$\psi_{min.} = -0.45$ $\psi_{max.} = 0.45$ $\omega_{min.} = -129.0331$ $\omega_{max.} = 129.0331$	$\psi_{min.} = -0.45$ $\psi_{max.} = 0.45$ $\omega_{min.} = -169.4076$ $\omega_{max.} = 169.4076$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
0.93	$\psi_{min.} = -0.465$ $\psi_{max.} = 0.465$ $\omega_{min.} = -134.6129$ $\omega_{max.} = 134.6129$	$\psi_{min.} = -0.465$ $\psi_{max.} = 0.465$ $\omega_{min.} = -176.1969$ $\omega_{max.} = 176.1969$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
1.0	$\psi_{min.} = -0.5$ $\psi_{max.} = 0.5$ $\omega_{min.} = -147.7959$ $\omega_{max.} = 147.7959$	$\psi_{min.} = -0.5$ $\psi_{max.} = 0.5$ $\omega_{min.} = -192.1368$ $\omega_{max.} = 192.1368$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$

Tablo 3.4: Devamı.

Serbest Akım Hızı Değerleri ($U\ [m/s]$)	Reynolds Sayısı Değerleri (Re)				
	100	300	1000	10000	20000
2.0	$\psi_{min.} = -1.0$ $\psi_{max.} = 1.0$ $\omega_{min.} = -353.1051$ $\omega_{max.} = 353.1051$	$\psi_{min.} = -1.0$ $\psi_{max.} = 1.0$ $\omega_{min.} = -427.4245$ $\omega_{max.} = 427.4245$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
2.29	$\psi_{min.} = -1.145$ $\psi_{max.} = 1.145$ $\omega_{min.} = -416.5730$ $\omega_{max.} = 416.5730$	$\psi_{min.} = -1.145$ $\psi_{max.} = 1.145$ $\omega_{min.} = -496.4174$ $\omega_{max.} = 496.4174$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
7.0	$\psi_{min.} = -3.5$ $\psi_{max.} = 3.5$ $\omega_{min.} = -1.5201 \times 10^3$ $\omega_{max.} = 1.5201 \times 10^3$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
9.0	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$
9.3	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$	$\psi_{min.} = -$ $\psi_{max.} = -$ $\omega_{min.} = -$ $\omega_{max.} = -$

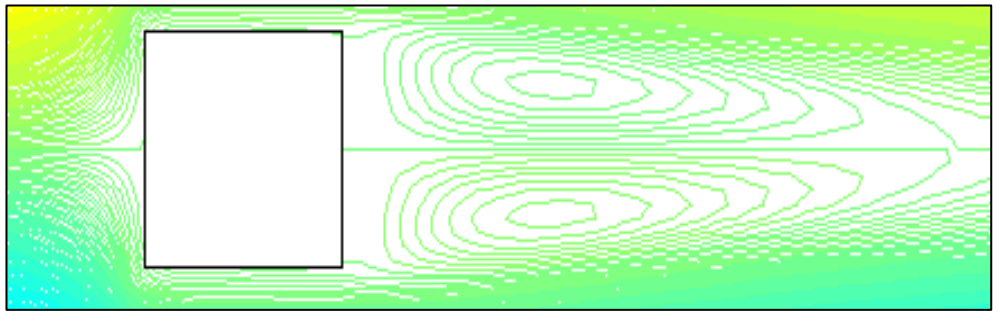
3.1.4. Kare Kesitli Silindir Etrafındaki Akış Probleminin Nümerik Çözümü Sonucu Elde Edilen Grafikler

Primer problem parametrelerinden Reynolds Sayısı (Re) değerleri 100, 300, 1000, 10000 ve 20000, serbest akım hızı (U_∞) değerleri 0.02, 0.04, 0.046, 0.07, 0.09, 0.093, 0.7, 0.9, 0.93, 1.0, 2.0, 2.29, 7.0, 9.0 ve 9.3 alınarak oluşturulan toplam 75 farklı (Re, U_∞) çifti için MATLAB R2010a programında akım çizgileri kontur grafikleri başka bir ifadeyle; Akım Fonksiyonu (ψ) kontur grafikleri çizilmiştir. Akış problemi zamandan bağımsız olarak çözüldüğü için daimî akış alanında sabit Akım Fonksiyonu eğrileri aynı zamanda akım çizgilerini göstermektedir. Dolayısıyla Akım Fonksiyonu kontur grafikleri aynı zamanda akış alanındaki akım çizgilerini gösteren grafikler olarak değerlendirilir.

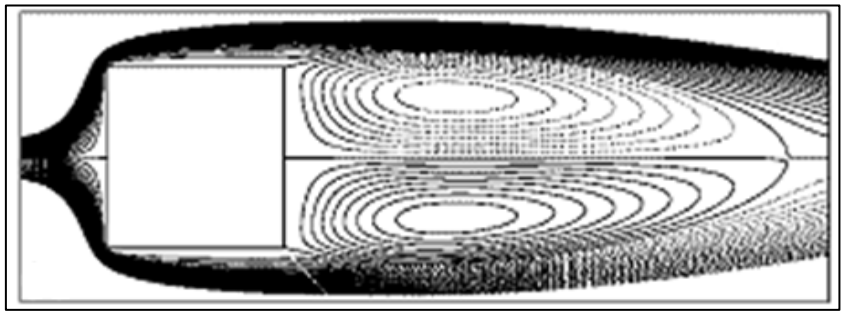
Toplam 75 farklı (Re, U_∞) çifti alınarak her bir (Re, U_∞) çifti için 4. hata mertebesinden nümerik formülasyon sonucu elde edilen Akım Fonksiyonu kontur grafikleri Tablo 3.5'te gösterilmiştir. Tablo 3.6'da ise yine toplam 75 farklı (Re, U_∞) çifti alınarak her bir (Re, U_∞) çifti için 2. hata mertebesinden nümerik formülasyon sonucu elde edilen Akım Fonksiyonu kontur grafikleri gösterilmiştir. Aynı zamanda literatürde yer alan diğer nümerik çalışmalarda elde edilen sonuçlarla karşılaştırma yapılabilmesi amacıyla 3 farklı çalışma dikkate alınmıştır. Bu çalışmalarda farklı nümerik yöntemler kullanılmıştır. Sen ve arkadaşlarının [Sen et al., 2010] yapmış olduğu çalışmada temel nümerik yöntemlerden Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılmıştır. Sohankar ve arkadaşlarının [Sohankar et al., 1999] yapmış olduğu çalışmada temel nümerik yöntemlerden Sonlu Hacimler Yöntemi kullanılmıştır. Raisee ve arkadaşlarının [Raisee et al., 2009] yapmış olduğu çalışmada temel nümerik yöntemlerden Sonlu Hacimler Yöntemi kullanılmıştır.

Sen ve arkadaşlarının yapmış olduğu çalışmada Reynolds Sayısı'nın 40 değerinde elde edilen Akım Fonksiyonu kontur grafiği, Sohankar ve arkadaşlarının yapmış olduğu çalışmada Reynolds Sayısı'nın 300 değerinde elde edilen Akım Fonksiyonu kontur grafiği ve Raisee ve arkadaşlarının yapmış olduğu çalışmada Reynolds Sayısı'nın 22000 değerinde elde edilen akım fonksiyonu kontur grafiği her bir çalışmadaki aynı Reynolds Sayısı değeri dikkate alınarak bu çalışmada elde edilen Akım Fonksiyonu kontur grafikleri ile karşılaştırılmıştır. Son olarak bu çalışmada 2. hata mertebesinden hassasiyetle ve 4. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denklemleri kullanılarak $Re = 300$, $U_\infty = 1\, m/s$ primer

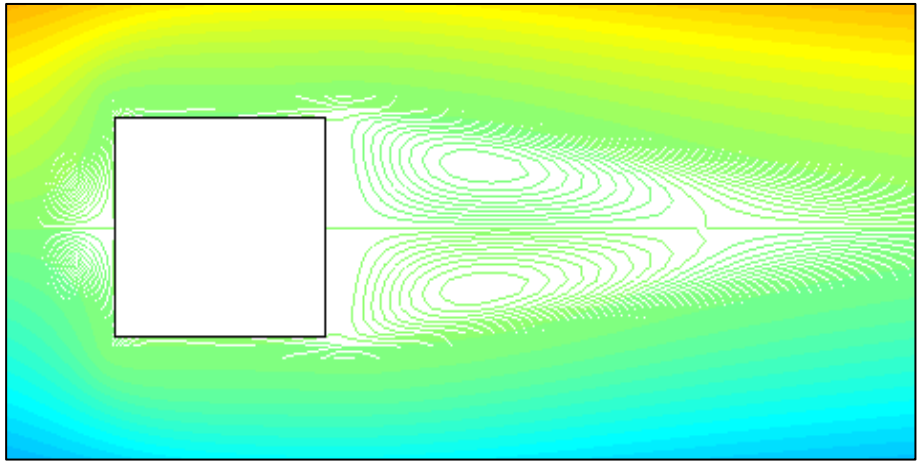
problem parametreleri için elde edilen Akım Fonksiyonu değerlerinin kontur grafikleri karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma grafikleri Şekil 3.10 ve Şekil 3.11'de gösterilmiştir.



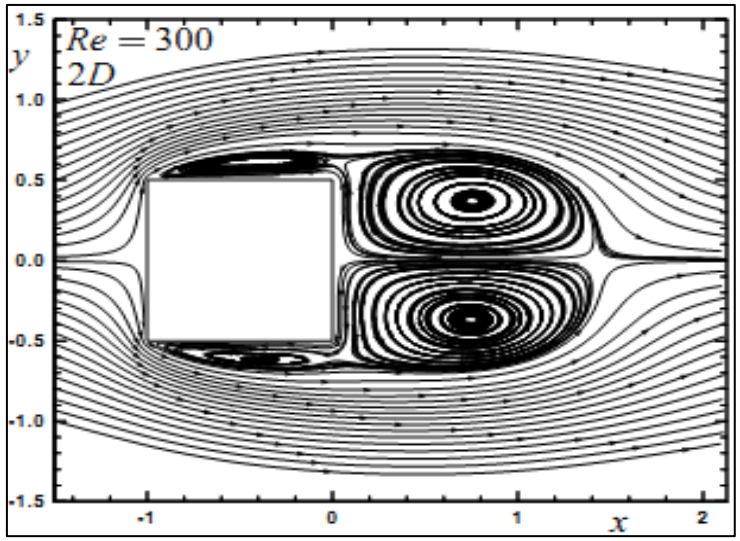
a) $Re = 40$ Mevcut Çalışma



c) $Re = 40$

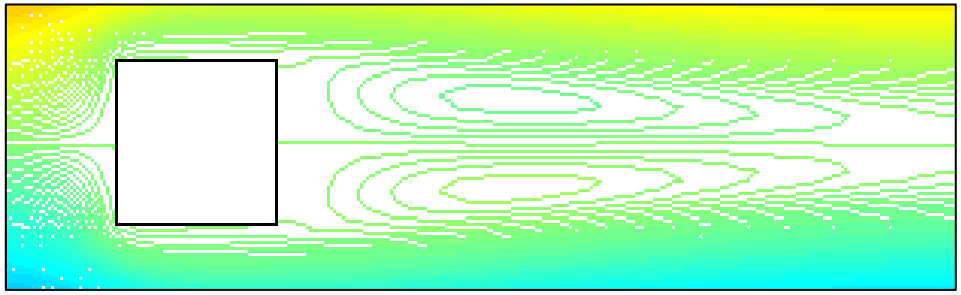


b) $Re = 300$ Mevcut Çalışma

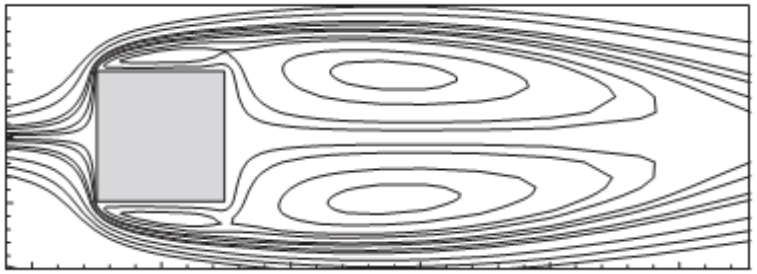


d) $Re = 300$

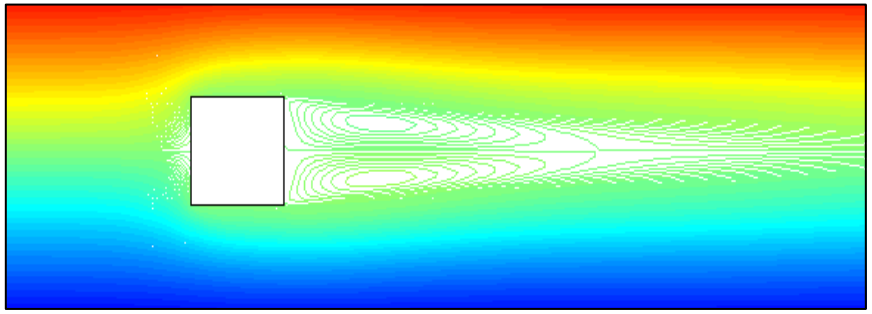
Şekil 3.10: Kare kesitli silindir etrafındaki akış probleminde $Re = 40$ ve $Re = 300$ değerleri için Akım Fonksiyonu kontur grafiklerinin karşılaştırılması.



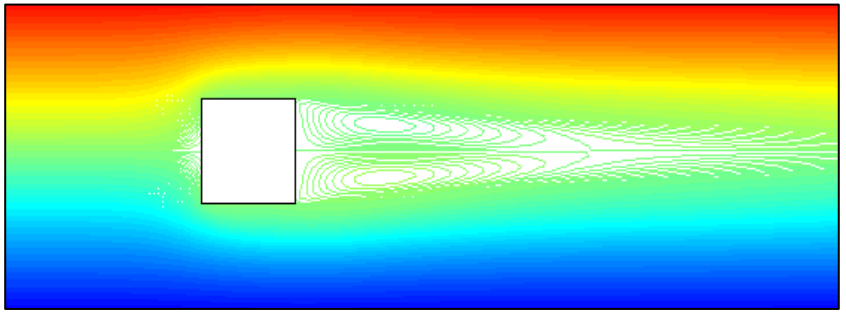
a) $Re = 22000$ Mevcut Çalışma



c) $Re = 22000$



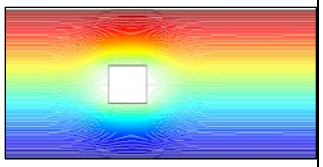
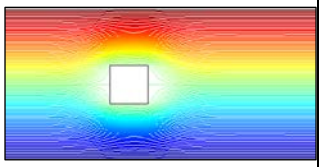
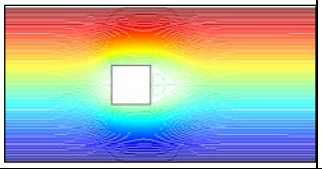
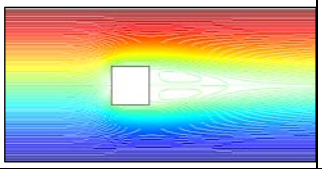
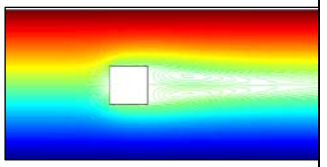
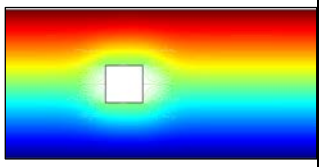
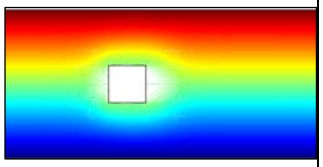
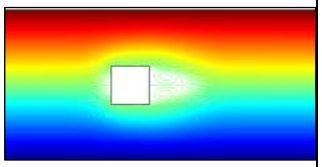
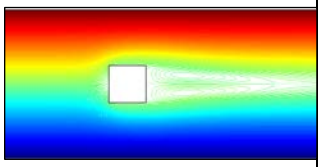
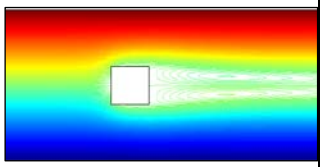
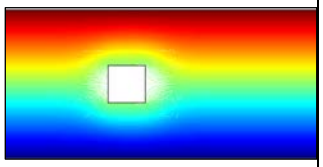
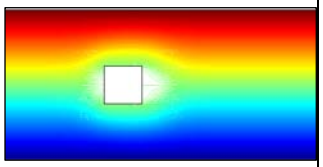
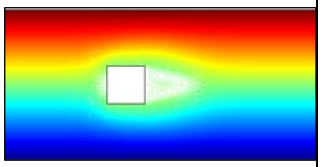
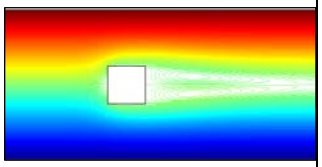
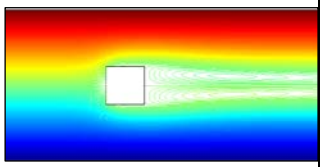
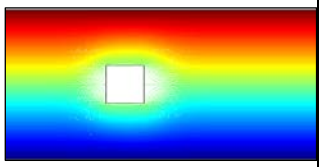
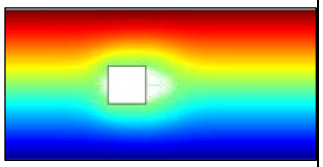
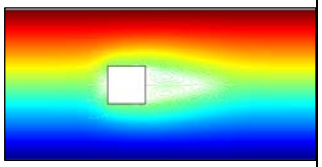
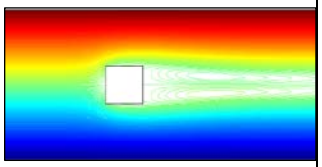
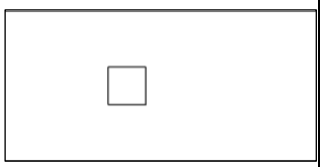
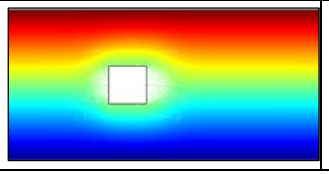
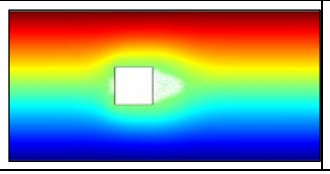
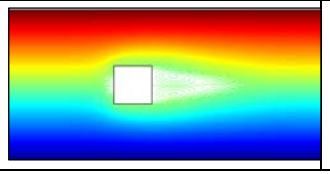
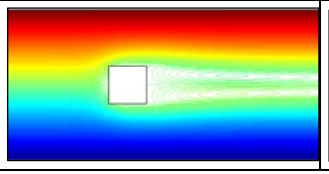
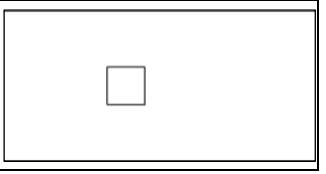
b) $Re = 300;\ U_\infty = 1;\ \vartheta(\Delta x^2, \Delta y^2)$ Mevcut Çalışma



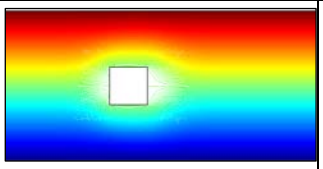
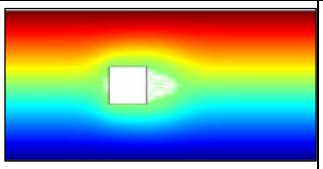
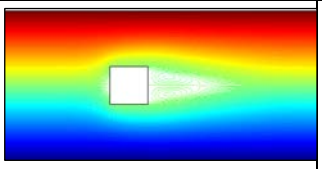
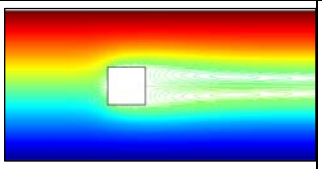
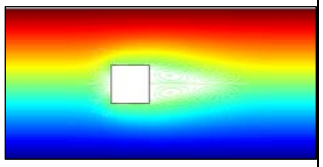
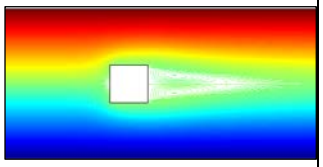
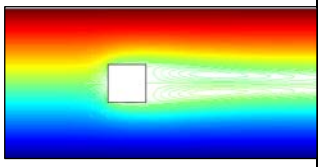
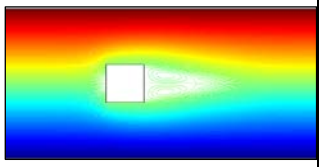
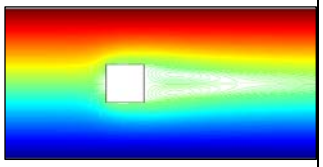
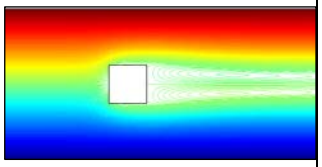
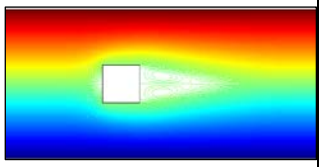
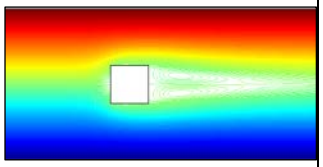
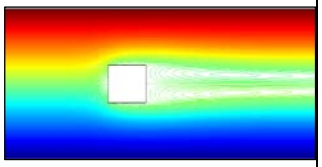
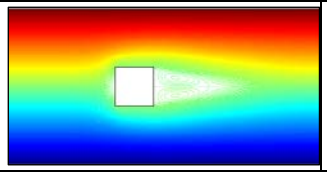
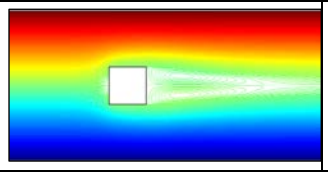
d) $Re = 300;\ U_\infty = 1;\ \vartheta(\Delta x^4, \Delta y^4)$ Mevcut Çalışma

Şekil 3.11: Kare kesitli silindir etrafındaki akış probleminde $Re = 300$ ve $Re = 22000$ değerleri için Akım Fonksiyonu kontur grafiklerinin karşılaştırılması.

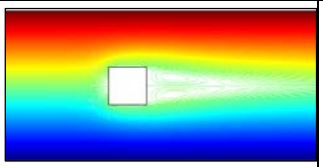
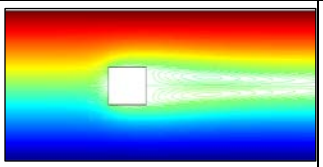
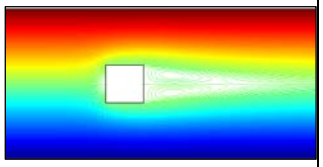
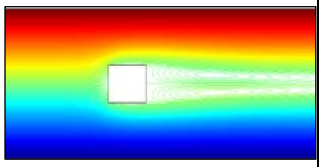
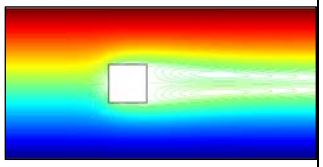
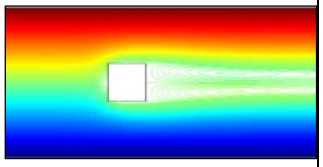
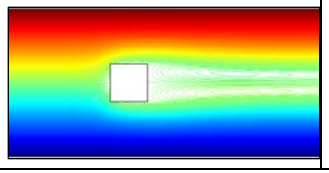
Tablo 3.5: Reynolds Sayısı ve serbest akım hızının farklı değerlerinde 4. hata mertebesinden nümerik formülasyon sonucu elde edilen Akım Fonksiyonu (akım çizgileri) kontur grafikleri.

Serbest Akım Hızı Değerleri ($U\ [m/s]$)	Reynolds Sayısı Değerleri (Re)				
	100	300	1000	10000	20000
0.02					
0.04					
0.046					
0.07					
0.09					

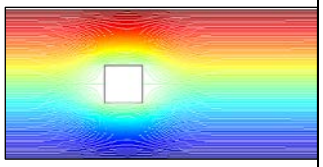
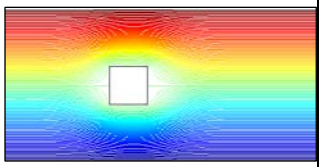
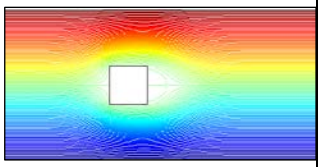
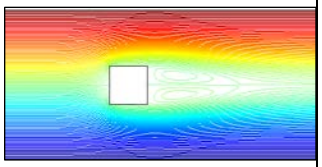
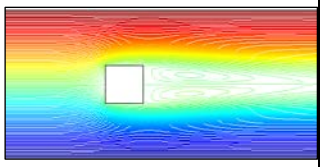
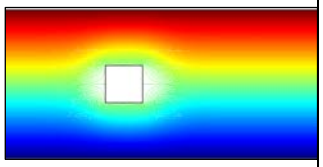
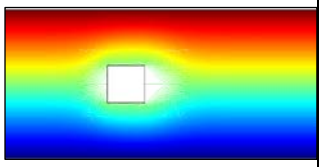
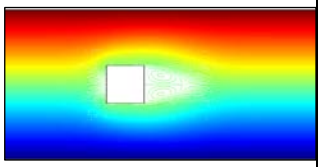
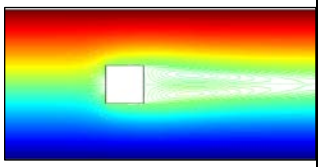
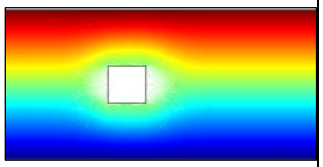
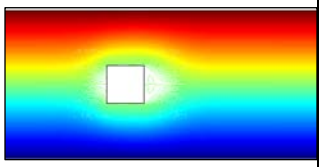
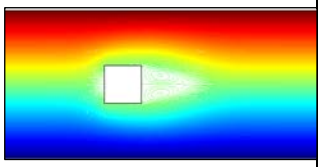
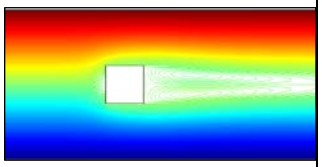
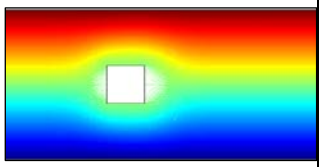
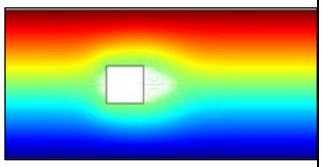
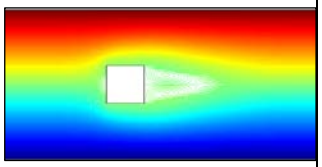
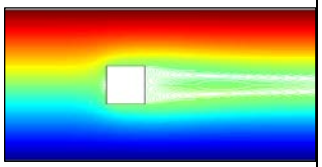
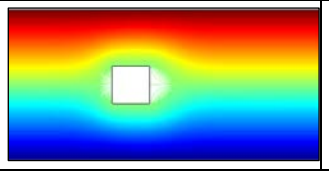
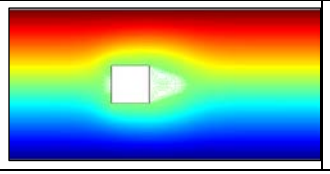
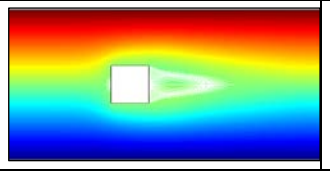
Tablo 3.5: Devamı.

Serbest Akım Hızı Değerleri ($U\ [m/s]$)	Reynolds Sayısı Değerleri (Re)				
	100	300	1000	10000	20000
0.093					
0.7					
0.9					
0.93					
1.0					

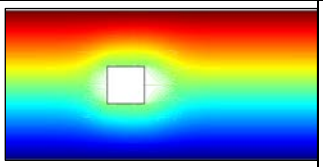
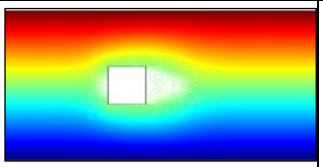
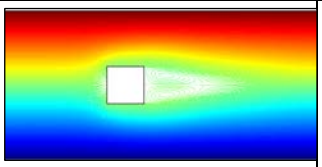
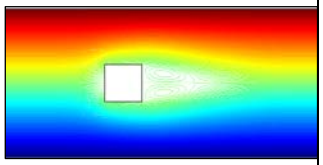
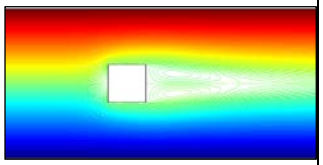
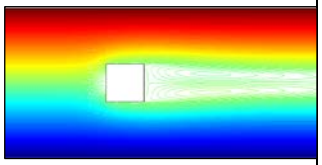
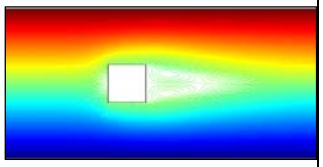
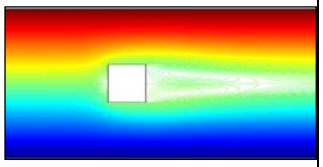
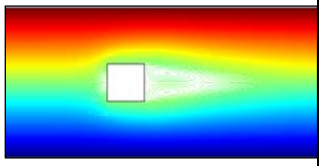
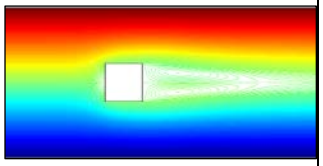
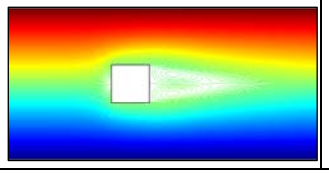
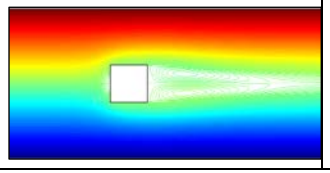
Tablo 3.5: Devamı.

Serbest Akım Hızı Değerleri ($U\ [m/s]$)	Reynolds Sayısı Değerleri (Re)				
	100	300	1000	10000	20000
2.0					
2.29					
7.0					
9.0					
9.3					

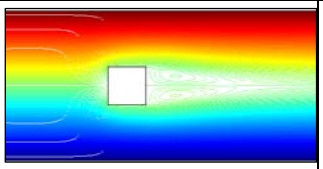
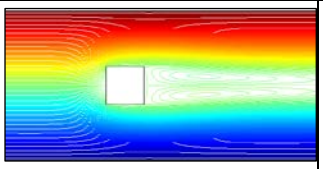
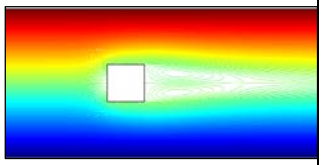
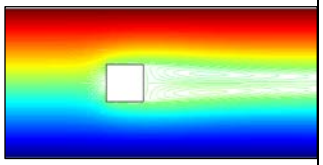
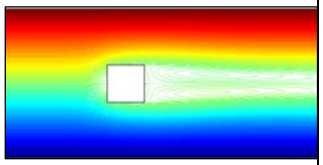
Tablo 3.6: Reynolds Sayısı ve serbest akım hızının farklı değerlerinde 2. hata mertebesinden nümerik formülasyon sonucu elde edilen Akım Fonksiyonu (akım çizgileri) kontur grafikleri.

Serbest Akım Hızı Değerleri ($U\ [m/s]$)	Reynolds Sayısı Değerleri (Re)				
	100	300	1000	10000	20000
0.02					
0.04					
0.046					
0.07					
0.09					

Tablo 3.6: Devamı.

Serbest Akım Hızı Değerleri ($U\ [m/s]$)	Reynolds Sayısı Değerleri (Re)				
	100	300	1000	10000	20000
0.093					
0.7					
0.9					
0.93					
1.0					

Tablo 3.6: Devamı.

Serbest Akım Hızı Değerleri ($U\ [m/s]$)	Reynolds Sayısı Değerleri (Re)				
	100	300	1000	10000	20000
2.0					
2.29					
7.0					
9.0					
9.3					

4. SONUÇLAR VE YORUMLAR

Bu çalışma kapsamında 3. bölümde ifade edilen test probleminin nümerik analizi Sonlu Farklar Yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Test problemi, iterasyon yöntemlerinden Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi kullanılarak elde edilen iterasyon denklemleri ile çözülerek iki-boyutlu akış alanı içerisinde Akım Fonksiyonu ve Vortisite'nin 4. hata mertebesinden hassasiyetle değerleri elde edilmiştir. Sonuçlar, 341x81 boyutundaki ağ yapısında elde edilmiştir.

Geliştirilen nümerik formülasyonun 3. bölümde ifade edilen test problemine uygulanması sonucu elde edilen sonuçlar ve grafikler bölüm 3.1.3.3. ve bölüm 3.1.4.'de verilmiştir. Aynı zamanda literatürde yer alan nümerik çalışmalardan Sen ve arkadaşlarının, Sohankar ve arkadaşlarının ve Raisee ve arkadaşlarının yapmış olduğu çalışmalarda elde edilen grafikler aynı primer problem paramatreleri kullanılarak mevcut çalışmada elde edilen grafikler ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucu mevcut çalışmada elde edilen grafikler ile diğer 3 çalışmada elde edilen grafiklerin benzer grafikler olduğu gözlemlenmiştir. Bu nümerik çalışmalarda nümerik yöntemlerden Sonlu Elemanlar ve Sonlu Hacimler Yöntemi kullanılırken mevcut çalışmada Sonlu Farklar Yöntemi kullanılmıştır. Sonlu Farklar Yöntemi kullanılmasının nedeni, Taylor Serisi Açılımı'nda istenilen terimden sonraki terimler ihmal edilerek hata mertebesi istenilen mertebede kolaylıkla değiştirilebilmektedir.

3. bölümde ifade edilen test problemi, 2. hata mertebesinden iterasyon denklemleri yerine aynı problem parametreleri ve aynı Reynolds Sayısı değerleri için 4. hata mertebesinden iterasyon denklemleri ile çözüldüğünde serbest akım hızı değerlerinin değer aralığının genişlediği yani 2. hata mertebesinden iterasyon denklemlerinde reel sonuç üretmeyen serbest akım hızı değerlerinin 4. hata mertebesinden iterasyon denklemleri kullanıldığında reel sonuçlar ürettiği sonucu elde edilmiştir.

3. bölümde yer alan Tablo 3.5 ve Tablo 3.6'daki Akım Fonksiyonu kontur grafiklerinde görüldüğü üzere iz bölgesinde oluşan ters yönde dönen ayrılma kabarcıklarının uzunluğu, Reynolds Sayısı'nın artmasıyla birlikte artmaktadır. Dolayısıyla aynı problem parametreleri kullanılmak üzere yalnızca Reynolds Sayısı

artırıldıkça iz bölgesinde oluşan ayrılma kabarcıklarının uzunluğu da orantısal olarak artmaktadır.

Akışkanlar Dinamiği literatüründe karşılaşılan ve kartezyen koordinat sisteminde tanımlanabilen farklı geometriler etrafındaki akış problemi, geliştirilen nümerik formülasyon ile 4. hata mertebesinden yaklaşıklıkla çözülebilir. Örneğin; bir otomobil modeli etrafındaki akış, geri basamak akışı (backward facing step flow) veya model geometrisi kartezyen koordinat sisteminde tanımlanabilen herhangi bir küt cisim etrafındaki akış, geliştirilen nümerik formülasyonun uygulanması ile çözülebilir. Böylece bu akış problemlerinin mevcut çözüm yöntemleri ile çözümlerine ilaveten alternatif çözüm üretilmesi sağlanır.

Bu çalışma kapsamında daimî akış problemleri için nümerik formülasyon geliştirilmiştir; ancak Navier-Stokes Denklem Sistemi'nin genel ifadesinde yer alan zamana bağlı terim olan $\rho \frac{\partial V}{\partial t}$ terimi göz önüne alınır ve bu terim 4. hata mertebesinden merkezî sonlu fark türev formülleri kullanılarak ifade edilirse daimî olmayan akış problemleri için nümerik formülasyon geliştirilmesi sağlanır. Dolayısıyla mevcut nümerik formülasyona en genel anlamda zamana bağlı terime karşılık gelen merkezî sonlu fark ifadesi eklenirse iki-boyutlu daimî olmayan ve sıkıştırılamaz akış problemleri için 4. hata mertebesinden nümerik formülasyon elde edilir.

Daimî olmayan akış problemleri için elde edilen nümerik formülasyon ile çözümde Reynolds Sayısı'nın $40 < Re < 400$ değer aralığında iz bölgesinde girdap kopmaları oluştuğu ve $Re = 200$ değerinde iz bölgesinde Von Karman Girdap Caddesi oluştuğu gözlemlenir [Gözmen, 2007]. Reynolds Sayısı'nın 400'den büyük değerlerinde ise Von Karman Girdap Caddesi'nin kaybolduğu ve türbülansın geliştiği gözlemlenir [Gözmen, 2007].

KAYNAKLAR

Anderson Jr. J. D., Degroote J., Degrez G., Dick E., Grundmann R., Vierendeels J., (2009), "Computational Fluid Dynamics An Introduction", 3rd Edition, Springer.

Bakkér A., (2006), "Applied Computational Fluid Dynamics Lecture-4 Classification of Flows", Dartmouth College.

Biringen S., Chow C. Y., (2011), "An Introduction to Computational Fluid Mechanics by Example", 2nd Edition, John Wiley & Sons Incorporated.

Chapra S. C., Canale R. P., (2010), "Numerical Methods for Engineers", 6th Edition, McGraw-Hill.

Chung T. J., (2010), "Computational Fluid Dynamics", 2nd Edition, Cambridge University Press.

Cebeci T., Shao J. P., Kafyeke F., Laurendeau E., (2005), "Computational Fluid Dynamics for Engineers", 1st Edition, Springer.

Çengel Y. A., Cimbala J. M., (2007), "Akışkanlar Mekaniği Temelleri ve Uygulamaları", 1. Baskı, İzmir Güven Bilimsel Kitabevi.

Erturk E., Dursun B., (2007), "Numerical solutions of 2-D steady incompressible flow in a driven skewed cavity", Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik/Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 87 (5), 377-392.

Erturk E., (2009), "Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği Ders Notları", Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü.

Gözmen B., (2007), "Control of Circular Cylinder Wakes In Shallow Flow", Master of Science Thesis, Çukurova University.

Güngör M., (2007), "İki Boyutlu Kararlı Sıkıştırılamaz Akış Denklemlerinin Silindirik Koordinatlarda Yoğun Metot ile 4. Dereceden Çözümü", Yüksek Lisans Tezi, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü.

Halıcı F., Gündüz M., (2001), "Örneklerle Isı Geçişi", 2. Baskı, Burak Ofset.

Hoffmann K. A., Chiang S. T., (2000), "Computational Fluid Dynamics", 4th Edition, Engineering Education System.

Karagöz İ., (2001), "Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları", 1. Baskı, Vipaş Yayınları.

Kaykısızlı H., (2006), "Sıkıştırılamaz İki Boyutlu Daimi Navier-Stokes Denklemlerinin Genel Eğrisel Koordinatlarda 4. Dereceden Sıkı Formülasyonu", Yüksek Lisans Tezi, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü.

Lomax H., Pulliam T. H., Zingg D. W., (2001), “Fundamentals of Computational Fluid Dynamics”, 1st Edition, Springer.

Masatsuka K., (2013), “I do like CFD/Governing Equations and Exact Solutions”, 2nd Edition, Katate Masatsuka.

Raisee M., Jafari A., Babaei H., Iacovides H., (2010), “Two-dimensional prediction of time dependent, turbulent flow around a square cylinder confined in a channel”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 62 (11), 1232-1263.

Sen S., Mittal S., Biswas G., (2009), “Flow past a square cylinder at low Reynolds numbers”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 67 (9), 1160-1174.

Serway R. A., (1995), “Fen ve Mühendislik için Fizik”, 3. Baskı, Palme Yayıncılık.

Sohankar A., Norberg C., Davidson L., (1999), “Numerical Simulation of Flow Past a Square Cylinder”, Proceedings of 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference, 1-6, San Francisco, USA, 18-23 July.

Spiegel M. R., Liu J., (1999), “Mathematical Handbook of Formulas and Tables”, 2nd Edition, McGraw-Hill.

Thom A., (1933), “The Flow Past Circular Cylinders at Low Speeds”, Proceedings of the Royal Society of London, 141 (845), 651-669.

Yıldız R. G., “Isı Transferi Denklemlerinin Çeşitli Sayısal Yöntemlerle Çözülmesi”, Yüksek Lisans Tezi, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü.

ÖZGEÇMİŞ

İlker İNAN, 1982 yılında Mardin'de doğdu. 2001 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü'nü 2005 yılında başarıyla tamamladı. 2008 yılında Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı'nda başladığı yüksek lisans öğrenimini 2014 yılında başarıyla tamamladı. 2006 yılından itibaren Enerji ve Mekanik Tesisat sektöründe faaliyet gösteren çeşitli firmalarda Üretim Mühendisliği, Teklif ve Hakediş Mühendisliği görevlerinde çalıştı.

EKLER

Ek A: Navier-Stokes Denklem Sisteminin 2. Hata Mertebesinden Hassasiyet ile Nümerik Formülasyonu

Bölüm 2.2.5.2.'de (2.175) no.'lu denklem olarak ifade edilen ξ-η düzleminde, Akım Fonksiyonu-Vortisite (ψ-ω) formunda ve boyutsuzlaştırılmış Navier-Stokes Denklem Sistemi'nde yer alan 1. denklem Akım Fonksiyonu Denklemi, 2. denklem ise Vortisite Denklemi'dir. Bu denklem sisteminde yer alan Akım Fonksiyonu ve Vortisite Denklemleri doğrusal kısmî türevli diferansiyel denklemler olup bu denklemlerin 2. hata mertebesinden sonlu fark denklemleri, Tablo A1.1'de verilen 2. hata mertebesinden merkezî sonlu fark türev formülleri göz önüne alınarak ifade edilir.

Tablo A1.1: Kartezyen koordinat sisteminde 2. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri, $\vartheta(\Delta x^2, \Delta y^2)$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + \vartheta(\Delta x^2)$
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} + \vartheta(\Delta y^2)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \vartheta(\Delta x^2)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \vartheta(\Delta y^2)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} + \vartheta(\Delta x^2, \Delta y^2)$
$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + 2f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta x^2 \Delta y} + \vartheta\left(\Delta x^2, \Delta y^2\right)$
$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + 2f_{i-1,j} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta x \Delta y^2} + \vartheta\left(\Delta x^2, \Delta y^2\right)$
$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \left(\frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1} - 2f_{i+1,j} + 4f_{i,j} - 2f_{i-1,j}}{\Delta x^2 \Delta y^2}\right.$ $\left. + \frac{f_{i+1,j-1} - 2f_{i,j-1} + f_{i-1,j-1}}{\Delta x^2 \Delta y^2}\right) + \vartheta(\Delta x^2, \Delta y^2)$

Tablo A1.1 göz önüne alınarak Akım Fonksiyonu'nun (ψ'nin) hesaplama alanındaki kartezyen koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; ξ-η düzleminde 1. mertebeden türev ifadesinin 2. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri;

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta \xi} + \vartheta(\Delta \xi^2) \tag{A1.1}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta \eta} + \vartheta(\Delta \eta^2) \tag{A1.2}$$

olarak ifade edilir.

Akım Fonksiyonu'nun (ψ'nin) ξ-η düzleminde 2. mertebeden türev ifadesinin 2. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri;

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta \xi^2} + \vartheta(\Delta \xi^2) \tag{A1.3}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta \eta^2} + \vartheta(\Delta \eta^2) \tag{A1.4}$$

olarak ifade edilir.

Tablo A1.1 göz önüne alınarak Vortisite'nin (ω'nın) ξ-η düzleminde 1. mertebeden türev ifadesinin 2. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri;

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}}{2\Delta \xi} + \vartheta(\Delta \xi^2) \tag{A1.5}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}}{2\Delta \eta} + \vartheta(\Delta \eta^2) \tag{A1.6}$$

olarak ifade edilir.

Akım Fonksiyonu'nun (ψ'nin) ξ-η düzleminde 2. mertebeden türev ifadesinin 2. hata mertebesinden hassasiyet ile merkezî sonlu fark türev formülleri;

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} = \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{\Delta \xi^2} + \vartheta(\Delta \xi^2) \tag{A1.7}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} = \frac{\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}}{\Delta \eta^2} + \vartheta(\Delta \eta^2) \tag{A1.8}$$

olarak ifade edilir.

Tablo A1.1'de yer alan merkezî sonlu fark türev formülleri kullanılarak Akım Fonksiyonu'nun (ψ'nin) ξ-η düzleminde 1. ve 2. mertebeden türev ifadelerinin 2. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülleri olarak ifade

edilen (A1.1), (A1.2), (A1.3) ve (A1.4) no.'lu denklemler, bölüm 2.2.5.1.'de ifade edilen (2.160) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi'nde yerine yazılırsa;

$$A_{i,j}\left(\frac{\psi_{i+1,j}-2\psi_{i,j}+\psi_{i-1,j}}{\Delta\xi^2}\right)+B_{i,j}\left(\frac{\psi_{i,j+1}-2\psi_{i,j}+\psi_{i,j-1}}{\Delta\eta^2}\right) +C_{i,j}\left(\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2\Delta\xi}\right)+D_{i,j}\left(\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{2\Delta\eta}\right)=-\omega_{i,j} \tag{A1.9}$$

olarak elde edilir. (A1.9) no.'lu denklem, ξ-η düzleminde ifade edildiğinden dolayı ξ-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe olan $\Delta\xi$ değeri ile η-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe olan $\Delta\eta$ değeri birbirine eşittir. Buna göre bölüm 2.2.7.1.'de ifade edilen (2.129) ve (2.130) no.'lu denklemler göz önüne alınarak (A1.9) no.'lu denklem yeniden düzenlenirse;

$$A_{i,j}\left(\frac{\psi_{i+1,j}-2\psi_{i,j}+\psi_{i-1,j}}{\Delta h^2}\right)+B_{i,j}\left(\frac{\psi_{i,j+1}-2\psi_{i,j}+\psi_{i,j-1}}{\Delta h^2}\right) +C_{i,j}\left(\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2\Delta h}\right)+D_{i,j}\left(\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{2\Delta h}\right)=-\omega_{i,j} \tag{A1.10}$$

olarak iki-boyutlu, daimî ve sıkıştırılamaz akış problemleri için Akım Fonksiyonu Denklemi'nin ξ-η düzleminde 2. hata mertebesinden hassasiyet ile sonlu fark denklemi elde edilir. (A1.10) no.'lu sonlu fark denklemi, bölüm 2.2.5.1.'de ifade edilen (2.160) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi'nin 2. mertebeden hassasiyette ($\vartheta(\Delta\xi^2,\Delta\eta^2)$) tahminidir ve (A1.10) no.'lu denklemin çözümü aynı zamanda bölüm 2.2.5.1.'de ifade edilen (2.160) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi'nin de 2. mertebeden doğrulukta bir çözümüdür.

Tablo A1.1'de yer alan 2. hata mertebesinden merkezî sonlu fark türev formülleri göz önüne alınarak ifade edilen sonlu fark denklemleri yerine kısmî türev ifadeleri yazılırsa Akım Fonksiyonu Denklemi'nin 2. hata mertebesinden genel ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir;

$$A\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+B\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+C\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+D\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=-\omega \tag{A1.11}$$

Akım Fonksiyonu Denklemi'nin 2. hata mertebesinden genel ifadesi olan (A1.11) no.'lu denklem ile bölüm 2.2.5.1.'de ifade edilen (2.160) no.'lu Akım Fonksiyonu Denklemi aynı formdadır. (A1.11) no.'lu denklemde yer alan A, B, C ve D sabit toplamlarına karşılık gelen ifadeler, hatırlanacağı üzere bölüm 2.2.5.1.'de (2.156), (2.157), (2.158) ve (2.159) no.'lu denklemler olarak ifade edilmiştir.

(A1.10) no.'lu denklem olarak ifade edilen Akım Fonksiyonu Denklemi'nin ξ-η düzleminde 2. hata mertebesinden hassasiyet ile sonlu fark denklemi göz önüne alınarak Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi uygulanır ve 2 aşamada Akım Fonksiyonu (ψ) değişkeninin 2. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denklemi elde edilir. 1. aşamada (A1.10) no.'lu denklemde birtakım matematiksel işlemler yapılırsa;

$$-\frac{2\psi_{i,j}}{\Delta h^2}\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)+A_{i,j}\left(\frac{\psi_{i+1,j}+\psi_{i-1,j}}{\Delta h^2}\right) +C_{i,j}\left(\frac{\psi_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}}{2\Delta h}\right)+B_{i,j}\left(\frac{\psi_{i,j+1}+\psi_{i,j-1}}{\Delta h^2}\right) +D_{i,j}\left(\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{2\Delta h}\right)+\omega_{i,j}=0 \tag{A1.12}$$

$$\left(\frac{2\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)}{\Delta h^2}\right)\psi_{i,j}=A_{i,j}\left(\frac{\psi_{i+1,j}+\psi_{i-1,j}}{\Delta h^2}\right) +C_{i,j}\left(\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2\Delta h}\right)+B_{i,j}\left(\frac{\psi_{i,j+1}+\psi_{i,j-1}}{\Delta h^2}\right) +D_{i,j}\left(\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{2\Delta h}\right)+\omega_{i,j} \tag{A1.13}$$

(A1.13) no.'lu denklemin her iki tarafı $\left(\frac{\Delta h^2}{2\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)}\right)$ ifadesi ile çarpılırsa;

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{A_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)\left(\psi_{i+1,j}+\psi_{i-1,j}\right) + \frac{\Delta h}{4}\left(\frac{C_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)\left(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{B_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)\left(\psi_{i,j+1}+\psi_{i,j-1}\right) + \frac{\Delta h}{4}\left(\frac{D_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)\left(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}\right) + \left(\frac{\Delta h^2}{2\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)}\right)\left(\omega_{i,j}\right) \quad \text{(A1.14)}$$

olarak elde edilir ve denklemin sağ tarafındaki bütün terimler $\left(\frac{1}{2\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)}\right)$ ortak parantezine alınırsa;

$$\psi_{i,j} = \left(\frac{1}{2\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)}\right)\left[A_{i,j}\left(\psi_{i+1,j}+\psi_{i-1,j}\right) + \frac{\Delta h}{2}C_{i,j}\left(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}\right) + B_{i,j}\left(\psi_{i,j+1}+\psi_{i,j-1}\right) + \frac{\Delta h}{2}D_{i,j}\left(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}\right) + \Delta h^2\left(\omega_{i,j}\right)\right] \quad \text{(A1.15)}$$

olarak elde edilir ve denklemin sağ tarafındaki $\psi_{i+1,j}$, $\psi_{i-1,j}$, $\psi_{i,j+1}$ ve $\psi_{i,j-1}$ ifadelerine ait katsayılar toplanırsa;

$$\psi_{i,j} = \left(\frac{1}{2\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)}\right)\left[\left(A_{i,j}+\frac{\Delta h}{2}C_{i,j}\right)\psi_{i+1,j} + \left(A_{i,j}-\frac{\Delta h}{2}C_{i,j}\right)\psi_{i-1,j} + \left(B_{i,j}+\frac{\Delta h}{2}D_{i,j}\right)\psi_{i,j+1} + \left(B_{i,j}-\frac{\Delta h}{2}D_{i,j}\right)\psi_{i,j-1} + \Delta h^2\left(\omega_{i,j}\right)\right] \quad \text{(A1.16)}$$

olarak elde edilir. 2. aşamada ise (A1.16) no.'lu denklem, relaxation (rölaksasyon) katsayısı, *w* kullanılarak düzenlenirse başka bir ifadeyle; (A1.16) no.'lu denklem, Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi ile ifade edilirse;

$$\psi_{i,j} = w\left(\frac{1}{2(A_{i,j}+B_{i,j})}\right)\left[\left(A_{i,j}+\frac{\Delta h}{2}C_{i,j}\right)\psi_{i+1,j}\right.$$
$$+\left(A_{i,j}-\frac{\Delta h}{2}C_{i,j}\right)\psi_{i-1,j}+\left(B_{i,j}+\frac{\Delta h}{2}D_{i,j}\right)\psi_{i,j+1} \qquad \text{(A1.17)}$$
$$\left.+\left(B_{i,j}-\frac{\Delta h}{2}D_{i,j}\right)\psi_{i,j-1}+\Delta h^2(\omega_{i,j})\right]+(1-w)\psi_{i,j}$$

olarak Akım Fonksiyonu'nun (ψ'nin) 2. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denklemi elde edilir. Sonuç olarak çözüm alanının herhangi bir (i,j) noktasındaki Akım Fonksiyonu (ψ) değerlerinin 2. hata mertebesinden hesaplanılması istenildiği akış problemlerinde 2. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten (A1.17) no.'lu iterasyon denklemi kullanılabilir.

Tablo A1.1'de yer alan merkezî sonlu fark türev formülleri kullanılarak Vortisite'nin (ω'nın) ξ-η düzleminde 1. ve 2. mertebeden türev ifadelerinin 2. hata mertebesinden hassasiyetle merkezî sonlu fark türev formülleri olarak ifade edilen (A1.1), (A1.2), (A1.5), (A1.6), (A1.7) ve (A1.8) no.'lu denklemler, bölüm 2.2.5.2.'de ifade edilen (2.174) no.'lu Vortisite Denklemi'nde yerine yazılırsa;

$$\frac{1}{Re}\left[A_{i,j}\left(\frac{\omega_{i+1,j}-2\omega_{i,j}+\omega_{i-1,j}}{\Delta\xi^2}\right)+B_{i,j}\left(\frac{\omega_{i,j+1}-2\omega_{i,j}+\omega_{i,j-1}}{\Delta\eta^2}\right)\right.$$
$$\left.+C_{i,j}\left(\frac{\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}}{2\Delta\xi}\right)+D_{i,j}\left(\frac{\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}}{2\Delta\eta}\right)\right]$$
$$=E_{i,j}\left[\left(\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{2\Delta\eta}\right)\left(\frac{\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}}{2\Delta\xi}\right)\right. \qquad \text{(A1.18)}$$
$$\left.-\left(\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2\Delta\xi}\right)\left(\frac{\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}}{2\Delta\eta}\right)\right]$$

olarak elde edilir. (A1.18) no.'lu denklem, hesaplama alanındaki kartezyen koordinat sisteminde başka bir ifadeyle; ξ-η düzleminde ifade edildiğinden dolayı ξ-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe olan $\Delta\xi$ değeri ile η-ekseni yönünde ardışık iki ağ yapısı noktası arasındaki mesafe olan $\Delta\eta$ değeri birbirine eşittir. Buna göre bölüm 2.2.7.1.'de ifade edilen (2.129) ve (2.130) no.'lu denklemler göz önüne alınarak (A1.18) no.'lu denklem yeniden düzenlenirse;

$$\frac{1}{Re}\Bigg[A_{i,j}\left(\frac{\omega_{i+1,j}-2\omega_{i,j}+\omega_{i-1,j}}{\Delta h^2}\right)+B_{i,j}\left(\frac{\omega_{i,j+1}-2\omega_{i,j}+\omega_{i,j-1}}{\Delta h^2}\right)$$
$$+C_{i,j}\left(\frac{\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}}{2\Delta h}\right)+D_{i,j}\left(\frac{\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}}{2\Delta h}\right)\Bigg]$$
$$=E_{i,j}\left[\left(\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{2\Delta h}\right)\left(\frac{\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}}{2\Delta h}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2\Delta h}\right)\left(\frac{\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}}{2\Delta h}\right)\right] \qquad \text{(A1.19)}$$

olarak iki-boyutlu, daimî ve sıkıştırılamaz akış problemleri için Vortisite Denklemi'nin ξ-η düzleminde 2. hata mertebesinden hassasiyet ile sonlu fark denklemi elde edilir. (A1.19) no.'lu sonlu fark denklemi, bölüm 2.2.5.2.'de ifade edilen (2.174) no.'lu Vortisite Denklemi'nin 2. mertebeden hassasiyette ($\vartheta(\Delta\xi^2,\Delta\eta^2)$) tahminidir ve (A1.19) no.'lu denklemin çözümü aynı zamanda bölüm 2.2.5.2.'de ifade edilen (2.174) no.'lu Vortisite Denklemi'nin de 2. mertebeden doğrulukta bir çözümüdür.

Tablo A1.1'de yer alan 2. hata mertebesinden merkezî sonlu fark türev formülleri göz önüne alınarak ifade edilen sonlu fark denklemleri yerine kısmî türev ifadeleri yazılırsa Vortisite Denklemi'nin 2. hata mertebesinden genel ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\frac{1}{Re}\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+B\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}+C\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+D\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)=E\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}-\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right) \qquad \text{(A1.20)}$$

Vortisite Denklemi'nin 2. hata mertebesinden genel ifadesi olan (A1.20) no.'lu denklem ile bölüm 2.2.5.2.'de ifade edilen (2.174) no.'lu Vortisite Denklemi aynı formdadır. (A1.20) no.'lu denklemde yer alan A, B, C, D ve E sabit toplamlarına karşılık gelen ifadeler, hatırlanacağı üzere bölüm 2.2.5.2.'de (2.168), (2.169), (2.170), (2.171) ve (2.172) no.'lu denklemler olarak ifade edilmiştir.

(A1.20) no.'lu denklem olarak ifade edilen Vortisite Denklemi'nin ξ-η düzleminde 2. hata mertebesinden hassasiyet ile sonlu fark denklemi göz önüne alınarak Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi uygulanır ve 2 aşamada Vortisite (ω) değişkeninin 2. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denklemi elde edilir. 1. aşamada (A1.20) no.'lu denklemde birtakım matematiksel işlemler yapılırsa;

$$-\frac{1}{Re}\frac{2\omega_{i,j}}{\Delta h^2}\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)+\frac{1}{Re}A_{i,j}\left(\frac{\omega_{i+1,j}+\omega_{i-1,j}}{\Delta h^2}\right)$$
$$+\frac{1}{Re}C_{i,j}\left(\frac{\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}}{2\Delta h}\right)+\frac{1}{Re}B_{i,j}\left(\frac{\omega_{i,j+1}+\omega_{i,j-1}}{\Delta h^2}\right)$$
$$+\frac{1}{Re}D_{i,j}\left(\frac{\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}}{2\Delta h}\right) \qquad \text{(A1.21)}$$
$$-E_{i,j}\left[\frac{\left(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}\right)\left(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}\right)}{4\Delta h^2}\right]$$
$$+E_{i,j}\left[\frac{\left(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}\right)\left(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}\right)}{4\Delta h^2}\right]=0$$

$$\frac{1}{Re}\left(\frac{2\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)}{\Delta h^2}\right)\omega_{i,j}=\frac{1}{Re}A_{i,j}\left(\frac{\omega_{i+1,j}+\omega_{i-1,j}}{\Delta h^2}\right)$$
$$+\frac{1}{Re}C_{i,j}\left(\frac{\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}}{2\Delta h}\right)+\frac{1}{Re}B_{i,j}\left(\frac{\omega_{i,j+1}+\omega_{i,j-1}}{\Delta h^2}\right)$$
$$+\frac{1}{Re}D_{i,j}\left(\frac{\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}}{2\Delta h}\right) \qquad \text{(A1.22)}$$
$$-E_{i,j}\left[\frac{\left(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}\right)\left(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}\right)}{4\Delta h^2}\right]$$
$$+E_{i,j}\left[\frac{\left(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}\right)\left(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}\right)}{4\Delta h^2}\right]$$

(A1.22) no.'lu denklemin her iki tarafı $\left(Re\frac{\Delta h^2}{2\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)}\right)$ ifadesi ile çarpılırsa;

$$\omega_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{A_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)\left(\omega_{i+1,j}+\omega_{i-1,j}\right) + \frac{\Delta h}{4}\left(\frac{C_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)\left(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{B_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)\left(\omega_{i,j+1}+\omega_{i,j-1}\right) + \frac{\Delta h}{4}\left(\frac{D_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)\left(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}\right) - \frac{Re}{8}\left(\frac{E_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)\left(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}\right)\left(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}\right) + \frac{Re}{8}\left(\frac{E_{i,j}}{A_{i,j}+B_{i,j}}\right)\left(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}\right)\left(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}\right) \tag{A1.23}$$

olarak elde edilir ve denklemin sağ tarafındaki bütün terimler $\left(\frac{1}{2\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)}\right)$ ortak parantezine alınırsa;

$$\omega_{i,j} = \left(\frac{1}{2\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)}\right)\Big[A_{i,j}\left(\omega_{i+1,j}+\omega_{i-1,j}\right) + \frac{\Delta h}{2}C_{i,j}\left(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}\right) + B_{i,j}\left(\omega_{i,j+1}+\omega_{i,j-1}\right) + \frac{\Delta h}{2}D_{i,j}\left(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}\right) - \frac{Re}{4}E_{i,j}\left(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}\right)\left(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j}\right) + \frac{Re}{4}E_{i,j}\left(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}\right)\left(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1}\right)\Big] \tag{A1.24}$$

olarak elde edilir ve denklemin sağ tarafındaki $\omega_{i+1,j}$, $\omega_{i-1,j}$, $\omega_{i,j+1}$ ve $\omega_{i,j-1}$ ifadelerine ait katsayılar toplanırsa;

$$\omega_{i,j} = \left(\frac{1}{2\left(A_{i,j} + B_{i,j}\right)}\right)\left[\left(A_{i,j} + \frac{\Delta h}{2}C_{i,j}\right)\omega_{i+1,j} + \left(A_{i,j} - \frac{\Delta h}{2}C_{i,j}\right)\omega_{i-1,j} + \left(B_{i,j} + \frac{\Delta h}{2}D_{i,j}\right)\omega_{i,j+1} + \left(B_{i,j} - \frac{\Delta h}{2}D_{i,j}\right)\omega_{i,j-1} - \frac{Re}{4}E_{i,j}\left(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}\right)\left(\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}\right) + \frac{Re}{4}E_{i,j}\left(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}\right)\left(\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}\right)\right] \quad \text{(A1.25)}$$

olarak elde edilir. 2. aşamada ise (A1.25) no.'lu denklem, relaxation (rölaksasyon) katsayısı, w kullanılarak düzenlenirse başka bir ifadeyle; (A1.25) no.'lu denklem, Gauss-Seidel Relaxation (Rölaksasyon) Yöntemi ile ifade edilirse;

$$\omega_{i,j} = w\left(\frac{1}{2\left(A_{i,j} + B_{i,j}\right)}\right)\left[\left(A_{i,j} + \frac{\Delta h}{2}C_{i,j}\right)\omega_{i+1,j} + \left(A_{i,j} - \frac{\Delta h}{2}C_{i,j}\right)\omega_{i-1,j} + \left(B_{i,j} + \frac{\Delta h}{2}D_{i,j}\right)\omega_{i,j+1} + \left(B_{i,j} - \frac{\Delta h}{2}D_{i,j}\right)\omega_{i,j-1} - \frac{Re}{4}E_{i,j}\left(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}\right)\left(\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}\right) + \frac{Re}{4}E_{i,j}\left(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}\right)\left(\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}\right)\right] + (1-w)\omega_{i,j} \quad \text{(A1.26)}$$

olarak Vortisite'nin (ω'nın) 2. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten iterasyon denklemi elde edilir. Sonuç olarak çözüm alanının herhangi bir (i,j) noktasındaki Vortisite (ω) değerlerinin 2. hata mertebesinden hassasiyetle hesaplanılması istenildiği akış problemlerinde 2. hata mertebesinden hassasiyetle sonuçlar üreten (A1.26) no.'lu iterasyon denklemi kullanılabilir.