KUVVETLİ LACUNARY YAKINSAK DİZİLER

Büşra Arslan Akbaş
181409101
Orcid: 0000-0002-5851-0965

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Tezli Yüksek Lisans
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sibel Ersan

İstanbul
T.C Maltepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Ocak, 2022



JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Bu belge, Yükseköğretim Kurulutarafından 19.01.2021 tarihli *"Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge"* ile bildirilen 6689 Sayılı Kişisel Verilerin Korunması Kanunu kapsamında gizlenmiştir.

ETİK İLKE VE KURALLARA UYUM BEYANI

Bu belge, Yükseköğretim Kurulutarafından 19.01.2021 tarihli *"Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge"* ile bildirilen 6689 Sayılı Kişisel Verilerin Korunması Kanunu kapsamında gizlenmiştir.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, ihtiyaç duyduğum her an destek olan, çalışma azmimi kuvvetlendiren ve bana güvenen, öğrencisi olmaktan onur ve gurur duyduğum kıymetli hocam tez danışmanım sayın Dr. Öğretim Üyesi Sibel Ersan'a, bu çalışmayı yapmakta bana ilham olan ,bilgi ve deneyimlerini paylaşan sayın Prof. Dr. Hüseyin Çakallı'ya ve yoğun çalışmalarım sürecinde bana sabır gösteren, destek veren eşim Barış Akbaş'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Büşra Arslan

Ocak, 2022

ÖZ
KUVVETLİ LACUNARY YAKINSAK DİZİLER

Büşra Arslan Akbaş
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Yüksek Lisans Programı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sibel Ersan
Maltepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, 2022

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmıdır ve bu bölümde çalıştığımız konunun tarihsel gelişimi hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, genel bir literatür bilgisi verilmiştir. Konunun anlaşılabilir olması için gerekli olan temel kavramlardan, notasyonlardan ve teoremlerden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, istatistiksel yakınsaklık kavramı verilmiş, bunların özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, Quasi-Cauchy dizileri hakkında bilgi verilmiş, ward süreklilik, ward kompaklık kavramları tanıtılmış ve ilgili teorem ve ispatları verilmiştir. Son bölüm olan beşinci bölümde ise, öncelikle kuvvetli lacunary yakınsaklık kavramı tanımlanmıştır. Kuvvetli lacunary yakınsak diziler ve toplanabilme metodu ile ilişkili içerme teoremlerinden bahsedilmiştir. Daha sonra bu kavram kullanılarak kuvvetli lacunary quasi-Cauchy dizi tanımı verilmiş ve aralarındaki ilişkiyi gösterir teoremlerin ispatlarından bahsedilmiştir. Ayrıca süreklilik ve kuvvetli lacunary ward süreklilik arasındaki ilişki gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Kuvvetli lacunary yakınsaklık, Quasi Cauchy dizileri, Ward süreklilik, Kuvvetli lacunary ward süreklilik.

ABSTRACT
STRONGLY LACUNARY CONVERGENT SEQUENCES

Büşra Arslan Akbaş
Master Thesis
Department of Mathematics
Master of Science in Mathematics
Thesis Advisor: Asst. Prof. Sibel Ersan
Maltepe University Graduate School, 2022

This thesis consists of five main parts. The first chapter is the introduction and information about the historical development of the subject we are working on is given in this chapter. In the second part, a general literature information is given. The basic concepts, notations and theorems that are necessary for the subject to be understandable are mentioned. In the third chapter, the concept of statistical convergence is given and their properties are examined. In the fourth chapter, information about Quasi-Cauchy sequences is given, concepts of ward continuity and ward compactness are introduced, and related theorems and proofs are given. In the fifth chapter, which is the last chapter, firstly the concept of strong lacunary convergence is defined. Strong lacunary convergent sequences and the inclusion theorems related to the summability method are mentioned. Then, using this concept, the definition of strong lacunary quasi-Cauchy sequence is given and proofs of theorems showing the relationship between them are mentioned. Also, the relationship between continuity and strong lacunary ward continuity is shown.

Keywords : Strongly lacunary convergence, Quasi Cauchy sequences, Ward continuity, Strongly lacunary ward continuity.

İçindekiler

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI ..... **ii**
ETİK İLKE VE KURALLARA UYUM BEYANI ..... **iii**
TEŞEKKÜR ..... **iv**
ÖZ ..... **v**
ABSTRACT ..... **vi**
İçindekiler ..... **vii**
KISALTMALAR ..... **viii**
ÖZGEÇMİŞ ..... **ix**
BÖLÜM 1. GİRİŞ **1**
BÖLÜM 2. GENEL TANIM ve TEOREMLER **3**
BÖLÜM 3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DİZİLER **14**
BÖLÜM 4. QUASİ CAUCHY DİZİLERİ **21**
BÖLÜM 5. KUVVETLİ LACUNARY YAKINSAK DİZİLER **27**
BÖLÜM 5.1 KUVVETLİ LACUNARY QUASI-CAUCHY DİZİLERİ **38**
BÖLÜM 6. SONUÇ **45**
KAYNAKÇA **46**

KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\boldsymbol{l}_{\infty}$	Sınırlı dizilerin kümesi
$\boldsymbol{\delta(K)}$	*K* kümesinin doğal yoğunluğu
$\boldsymbol{S}$	İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\boldsymbol{S_0}$	İstatistiksel sıfır diziler uzayı
$\boldsymbol{S_\theta}$	Lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\boldsymbol{Q = \{k_r\}}$	Lacunary dizi
$\boldsymbol{N_\theta}$	Kuvvetli lacunary yakınsak diziler uzayı
$\boldsymbol{\lvert\sigma_1\rvert}$	Kuvvetli Cesaro yakınsak diziler uzayı

ÖZGEÇMİŞ

Büşra Arslan

Matematik Anabilim Dalı

Eğitim

Derece	*Yıl*	*Üniversite, Enstitü, Anabilim/Anasanat Dalı*
Y.Ls.	2022	Maltepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Ls.	2016	Mimar Sinan Güzel Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı
Lise	2012	Asiye Ağaoğlu Anadolu Lisesi

İş/İstihdam

Yıl	*Görev*
2020 -	Matematik Öğretmeni. İrfan Okulları
2016- 20	Matematik Öğretmeni. Özel İnci Anadolu Lisesi

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı analizin temel taşıdır. Dolayısıyla sürekli bu kavram üzerinde çalışılmakta ve geliştirilmeye çalışılmaktadır. İstatistiksel yakınsaklıkta bu kavramın bir genelleştirmesidir ve günümüzde fonksiyonel analizde ve toplanabilme teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu kavram ilk kez 1935 yılında Zygmund tarafından kitabında ortaya atılmış [1], daha sonra 1949 yılında Steinhaus tarafından bir konferansta verilmiş ama asıl Fast tarafından 1951 yılında ilk makale halinde yayınlanmıştır [2]. Daha sonra Schoenberg [3], Salat [8], Fridy [9] ve Buck tarafından [4] bu kavram birbirinden bağımsız olarak incelenmiştir. İstatistiksel yakınsaklık kavramı aktif bir araştırma haline gelmiş olup farklı alanlarda da uygulaması yapılmıştır. Bunlardan biri olan istatistiksel yakınsaklık kavramı ile Cesaro toplanabilirlik kavramı arasındaki ilişki Connor tarafından 1998 yılında verilmiştir [16]. İstatistiksel yakınsaklık ile Cesaro toplanabilirlik kavramları, tezin üçüncü bölümünde verilmiştir. Bu kavramlar tezin ana konusunun gelişmesi için bir basamak oluşturmuştur.

Quasi Cauchy dizilerini ilk inceleyen ve 2000 yılında isimlendiren kişiler Burton ve Coleman dır [5]. Burton ve Coleman'nın bu çalışmasını daha sonrası Hüseyin Cakalli geliştirerek quasi Cauchy dizilerini tanımlamıştır [6]. Bu çalışmasında Cakalli, quasi Cauchy dizilerinin ward sürekliliği, ward kompaktlığı ile ilgili ilginç teoremler ispatlamıştır. Quasi-Cauchy dizileri, ward süreklilik, ward kompaktlık kavramları tezin dördüncü bölümünde tanıtılmış ve ilgili teoremler ve ispatları verilmiştir.

Kuvvetli lacunary yakınsaklık kavramı Fredman Sember ve M.Raphael tarafından verilmiştir [15]. Freedman, Sember ve Raphael 1978 yılında yaptıkları araştırmalarında θ lacunary dizi ifadesini kullanarak kuvvetli lacunary yakınsak toplanabilir dizi uzayını tanımlamıştır. $|\sigma_1|$ kuvvetli Cesaro toplanabilir dizi uzayı ile kuvvetli lacunary yakınsak dizi uzayı arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Fridy ve Orhan, lacunary dizi tanımını kullanarak istatistiksel yakınsaklıkla arasındaki ilişkiyi inceleyerek lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmışlardır [10].

Fridy ve Orhan bu çalışmalarının sonucunda istatistiksel yakınsak diziler ile toplanabilme metotları arasındaki ilişkileri gösterir çalışmalar yapmışlardır [11].

Bu tez çalışmasında öncelikle konuların anlaşılabilir olması için gerekli olan temel kavramlar ve teoremler ikinci bölümde verilmiştir. Bu bölümde M. Balcı'nın kitabından faydalanılmıştır [17]. Tezin amacı, öncelikle kuvvetli lacunary yakınsaklık kavramı tanımlamak daha sonra kuvvetli lacunary yakınsaklık ile Cesaro toplanabilirlik arasındaki içerme teoremlerini vermektir. Ayrıca kuvvetli lacunary yakınsak diziler ve quasi Cauchy dizilerini harmanlayarak kuvvetli lacunary quasi-Cauchy dizi kavramını geliştirmek ve bunlarla ilgili teoremler ve ispatlarını vermektir. Ek olarak, süreklilik ve kuvvetli lacunary ward süreklilik kavramları verilip daha sonra bunlar arasındaki içerme teoremlerinin ispatları yapılacaktır. Bu tezde Hüseyin Cakalli'nın çalışmalarından yararlanılmıştır.

BÖLÜM 2. GENEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde amaç konumuz için gerekli olan literatür bilgilerini vermektir. Genel tanımlar, teoremler ve ispatları verilecektir.

Tanım 2.1 (Dizi): Tanım kümesi $\mathbb{N}^+ = \{1,2,\dots,n,\dots\}$ (doğal sayılar) kümesi olan her fonksiyona dizi denir. Değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise, diziye reel terimli dizi denir. Yani reel terimli dizi

$$f: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$$

şeklinde bir fonksiyondur. f fonksiyonunun görüntü kümesi

$$(f(1), f(2), \dots, f(n), f(n+1), \dots)$$

olarak yazılır ve görüntü kümesindeki elemanlar dizinin terimlerini oluşturur.
Yani:

$$f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots, f(n) = x_n, f(n+1) = x_{n+1} \ \dots \text{dir.}$$

Buradan x_1 dizinin 1. terimi, x_2 dizinin 2. terimi ve x_n dizinin n. terimi ya da genel terimidir. Genel terimi x_n olan bir dizi kısaca (x_n) şeklinde gösterilir. Öyleyse
$(x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots)$ dir. Bir diziye örnek olarak

$x_n = \sqrt{n}$ ya da $(x_n) = (\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n}, \dots)$

verilebilir.

Tanım 2.2 (Alt Dizi): Herhangi bir (x_n) dizisi verilmiş olsun. (x_{n_k}) dizisine (x_n) dizisinin alt dizisi denir. $(y_k) = (x_{n_k})$ yazılarak alışık olduğumuz yazım elde edilmiş olur. Örneğin $(2,4,\dots,2n,\dots)$ çift sayılar dizisi $(1,2,\dots,n,\dots)$ pozitif tam sayılar dizisinin bir alt dizisidir.

Tanım 2.3 (Sınırlı Dizi): Eğer her $n = 1,2,\dots$ için $m \leq x_n$ oluyorsa, (x_n) dizisinin m ile alttan sınırlıdır denir.
Eğer $n = 1,2,\dots$ için $x_n \leq M$ oluyorsa, (x_n) dizisinin M ile üstten sınırlıdır denir.

Hem alttan hem üstten sınırlı bir diziye sınırlı dizi denir. Yani her $n > 0$ sayısı için $|x_n| \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sabit sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine sınırlı dizi denir.

Tanım 2.4 (Yakınsak dizi): $\forall\ \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|x_n - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine L sayısına yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ ile gösterilir. Ayrıca $n \to \infty$ iken $x_n \to L$ şeklinde ifade edilebilir. Dizi bir reel sayıya yakınsıyor ise yakınsak dizi, bir reel sayıya yakınsamıyor ise ıraksak dizi denir.

Örnek 2.5: $(x_n) = \left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right)$ dizisini inceleyelim.

$x_1 = \frac{1+(-1)^1}{1} = 0$

$x_2 = \frac{2+(-1)^2}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

…

$x_n = \frac{n+(-1)^n}{n} = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

dizisi 1 sayısına yakınsaktır.

Teorem 2.6: Bir (x_n) dizisi yakınsak ise sınırlıdır.

İspat: Yakınsak herhangi bir dizi (x_n) olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ diyelim. $\varepsilon = 1$ pozitif sayısı için $n > n_1$ olduğunda $|x_n - x| < 1$ olacak şekilde 1 sayısına bağlı bir n_1 pozitif tam sayısı vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x|$ olduğundan $|x_n| < |x_n - x| + |x|$ olur. $n > n_1$ olduğu için $|x_n| < |x| + 1$ dir. $max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_1}|, |x| + 1\} = K$ seçilirse bu takdirde her n pozitif tam sayısı için $|x_n| \leq K$ elde edilmiş olur. Bu ise (x_n) dizisinin sınırlı olduğunu gösterir ve teoremin ispatını tamamlar.
Fakat bu teoremin karşıtı doğru değildir. Bunu bir örnekle gösterelim:

$(x_n) = (\,(-1)^n)$ dizisini alalım. $|x_n| = |(-1)^n| = 1$ olduğundan (x_n) dizisi sınırlıdır fakat (x_n) dizisi yakınsak değildir.

Teorem 2.7: Yakınsak bir dizinin limiti tektir.

İspat: Yakınsak herhangi bir dizi (x_n) olsun. (x_n) dizisinin $a \neq b$ olacak şekilde hem a hem b sayılarına yakınsadığını varsayalım. $|a - b| \neq 0$ olur. $\alpha = |a - b|$ alalım. $\alpha > 0$ dır. (x_n) dizisi a ya yakınsadığından tüm $n \geq N_1$ için $|x_n - a| < \frac{\alpha}{2}$ olacak şekilde N_1 pozitif tam sayısı vardır. Aynı şekilde (x_n) dizisi b ye yakınsadığından tüm $n \geq N_2$ için $|x_n - b| < \frac{\alpha}{2}$ olacak şekilde N_2 pozitif tam sayısı vardır.

$$N = max\{N_1, N_2\}$$

alalım. Buradan üçgen eşitsizliği kullanarak;

$$\alpha = |a - b| = |a - x_N + x_N - b| \leq |a - x_N| + |x_N - b|$$

$$|a - x_N| < \frac{1}{2}\alpha \qquad \text{ve} \qquad |x_N - b| < \frac{1}{2}\alpha$$

olduğundan

$$\alpha = |a - b| = |a - x_N + x_N - b| \leq |a - x_N| + |x_N - b| < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

bulunur. Buradan $\alpha < \alpha$ eşitsizliği elde ederiz. Dolayısı ile bu çelişkide $a = b$ olduğu açıktır.

Sonuç: Reel terimli yakınsak dizinin limiti tek olduğundan a sayısına yakınsayan bir (x_n) dizisini ele aldığımızda bunu $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ şeklinde ifade ederiz.

Tanım 2.8 (Cauchy Şartı): (x_n) reel terimli bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $n,m \geq n_0$ iken $|x_n - x_m| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy şartını sağlar denir ya da (x_n) bir Cauchy dizisidir denir.

Teorem 2.9: Her yakınsak dizi Cauchy dizisidir.

İspat: Herhangi bir yakınsak dizi olarak (x_n) alalım ve $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \alpha$ olsun. (x_n) dizisinin Cauchy şartını sağladığını göstermek için herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \alpha$ olduğundan $n \geq n_0$ olduğunda $|x_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir n_0 sayısı vardır. Bu takdirde $n,m \geq n_0$ olduğunda,

$|x_n - x_m| = |x_n - \alpha + \alpha - x_m| \leq |x_n - \alpha| + |\alpha - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

olur. O halde (x_n) dizisi Cauchy şartını sağlar.

Sonuç : Reel terimli bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul Cauchy şartını sağlamasıdır.

Teorem 2.10: Her Cauchy dizisi sınırlıdır.

İspat: Cauchy şartını sağlayan herhangi bir (x_n) dizisi alalım. Öyleyse $\varepsilon > 0$ iken $n,m \geq n_0$ olduğunda $|x_n - x_m| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir n_0 sayısı vardır. $\varepsilon = 1$ seçelim. $n,m \geq n_l$ olduğunda $|x_n - x_m| < 1$ olacak şekilde bir n_l doğal sayısı vardır.

Öte yandan her $n \epsilon N$ için

$$|x| = |x_n - x_{n_l} + x_{n_l}| \leq |x_n - x_{n_l}| + |x_{n_l}| < 1 + |x_{n_l}|$$

dir. Buradan $n \geq n_l$ için $|x_n| < 1 + |x_{n_l}|$ bulunur.

$$max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_l-1}|, 1 + |x_{n_l}|\} = K$$

diye seçtiğimiz taktirde buradan her $n \in N$ için $|x_n| \leq K$ olur ve (x_n) dizisinin sınırlı olduğu elde edilmiş olur.

Teorem 2.11: Bir Cauchy dizisinin her alt dizisi Cauchydir.

İspat : Bir (x_n) Cauchy dizisini alalım. (x_{n_k}) bu dizinin bir alt dizisi olsun. Bu (x_{n_k}) alt dizisinin Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz.

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayı olsun. Öyle bir N vardır ki her $n, m > N$ için (x_n) Cauchy dizisi olduğundan dolayı $|x_n - x_m| < \varepsilon$ dır.

Benzer şekilde $k, l > N$ ise $N < k \leq n_k$ ve $N < l < n_l$ dir. Buradan $|x_{n_k} - x_{n_l}| < \varepsilon$ olduğu kolayca görülmektedir. Dolayısıyla bir Cauchy dizisinin alt dizisinin de Cauchy dizisi olduğu açıktır.

Teorem 2.12: Bir Cauchy dizisinin bir alt dizisi yakınsaksa dizinin kendisi de yakınsaktır ve her iki dizi de aynı limite yakınsar**.**

İspat: Herhangi bir (x_n) Cauchy dizisi alalım. Yani $\forall\, \varepsilon > 0$ için $n, m \geq N$ için

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (1)$$

sağlansın. Ayrıca (x_{n_k}), bir (x_n) Cauchy dizisinin alt dizisi olsun. Bu alt dizi de Cauchy dizisi olduğundan

$\forall\, \varepsilon > 0$ için $l > N$ ise $n_l > l > N$ için

$$|x_{n_l} - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

olur.

Varsayalım ki bu alt dizi L sayısına yakınsasın. (x_{n_k}) yakınsak dizi olduğundan dolayı $\forall\, \varepsilon > 0$ için $k > N\ ise\ n_k > k > N$ için

$$|x_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (3)$$

olur. Buradaki amacımız (x_n) dizisinin yakınsak olduğunu göstermektir. Yani $\forall\, \varepsilon > 0$ için $|x_n - L| < \varepsilon$ olmalıdır. (1), (2) ve (3) ten aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} |x_n - L| &= |x_n - L - x_{n_k} + x_{n_k} - x_{n_l} + x_{n_l}| \\ &= |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - x_{n_l}) + (x_{n_l} - L)| \\ &\leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_{n_l}| + |(x_{n_l} - L)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Buradan alt dizisi yakınsak olan bir Cauchy dizisinin kendisinin de yakınsak olduğu görülür ve ispat böylece tamamlanmış olur.

Tanım 2.13 (Düzgün süreklilik): X boş olmayan bir küme ve $X \in \mathbb{R}$ için $f: X \to \mathbb{R}$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı vardır ki $|x_1 - x_2| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x_1, x_2 \in X$ için $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ sağlanıyorsa f fonksiyonu X kümesi üzerinde düzgün süreklidir. Sürekli her fonksiyon düzgün sürekli değildir. Bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 2.14: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x^2$ fonksiyonu süreklidir ancak düzgün sürekli değildir.

İspat: $f(x) = x^2$ fonksiyonun düzgün sürekli olmadığını göstermek için $\varepsilon = 1$ olsun. Her $\delta > 0$ için $x_1 , x_2 \in \mathbb{R}$ olacak şekilde $x_1 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ ve $x_2 = \frac{1}{\delta}$ seçelim. Düzgün süreklilik tanımından $|x_1 - x_2| < \delta$ ve $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ koşulları sağlanmalıdır.

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} - \frac{1}{\delta}\right| = \left|\frac{\delta}{2}\right| < \delta$$

ve

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2\right| = \left|1 + \frac{\delta^2}{4}\right| > 1 = \varepsilon$$

olur. Bu durum ise düzgün süreklilik tanımına aykırıdır. Öyleyse f fonksiyonu $\mathbb{R}$ de düzgün sürekli değildir.

Tanım 2.15 (Kapanış): X, herhangi bir uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A yı kapsayan en küçük kapalı kümeye veya eşdeğer olarak A yı kapsayan bütün kapalı kümelerin ara kesitine A kümesinin kapanışı denir ve $\bar{A}$ sembolü ile gösterilir.

$$\bar{A} = \cap \{ K : K \text{ kapalı ve } A \subset K \}$$

Bir A kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul $A = \bar{A}$ olmalıdır.

Tanım 2.16 (Metrik Uzay): Boş olmayan bir X kümesi ile $d: X \times X \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall x, y, z \in X$ için

$(i)\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$(ii)\ d(x,y) = d(y,x)$

$(iii)\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

aksiyomları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X kümesi üzerinde metrik ve (X, d) ye metrik uzay denir.

Tanım 2.17: (X, d) bir metrik uzayı olsun. X üzerinde herhangi bir (x_n) dizisi tanımlayalım. $\forall\ \varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda $d(x_n, l) < \varepsilon$ olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı varsa (x_n) dizisine l noktasına yakınsaktır denir.

Tanım 2.18 (Tam Uzay): X metrik uzayının her Cauchy dizisi X de bulunan bir limit noktasına sahipse (X, d) metrik uzayı tamdır denir.

Teorem 2.19 : Metrik uzayda her yakınsak dizi aynı zamanda Cauchy dizisidir.

İspat: (X, d) metrik uzayından herhangi bir yakınsak dizi (x_n) alalım. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olsun. (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu ispatlamak için herhangi bir $\varepsilon > 0$ olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olduğu için $n > n_0$ olduğunda $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir n_0 sayısı vardır. Öyleyse $n, m > n_0$ iken

$$\mathrm{d}(\mathrm{x_n}, \mathrm{x_m}) \leq \mathrm{d}(\mathrm{x_n}, \mathrm{x}) + \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{x_m}) < \varepsilon$$

dır. Buradan (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir.
Bu teoremin karşıtı her zaman sağlanmaz.

Örnek 2.20: $X = (0,1)$ kümesini ve $d(x, y) = |x - y|$ metriği ile ele alalım. $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi Cauchy dizisidir. Ancak $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi $(0,1)$ aralığında yakınsak değildir. Buradan (X, d) tam uzay değildir sonucu çıkar.

Tanım 2.21 (Kompaktlık): X bir metrik uzay olsun. X uzayındaki her dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise X uzayı kompakt uzaydır denir. $A \subseteq X$ olduğunda A kümesindeki bütün dizilerin limiti yine A kümesinde ve yakınsak bir alt diziye sahip ise A ya kompakt alt küme denir.

Bir metrik uzayın kompakt kümeleri kapalı ve sınırlıdır.

Tanım 2.22 (Cisim) : K boş olmayan bir küme olsun ve bu kümenin elemanları arasında + ve · ile göstereceğimiz iki tane ikili işlem tanımlanmış olsun. $(K, +, \cdot)$ üçlüsü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu üçlüye cisim adı verilir.

i. $a, b \in K$ ise $a + b = b + a$ ve $a \cdot b = b \cdot a$
ii. $a, b \in K$ ise $a + (b + c) = (a + b) + c$ ve $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
iii. $a, b \in K$ ise $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
iv. K kümesinde 0 adında öyle bir eleman vardır ki, her ve $a \in K$ için $a + 0 = a$ eşitliğini sağlar.

v. K kümesinde 1 adında 0'dan farklı öyle bir eleman vardır ki, her ve $a \in K$ için $a \cdot 1 = a$ eşitliğini sağlar.

vi. Her $a \in K$ için K kümesinde $-a$ adında öyle bir eleman vardır ki, $a + (-a) = 0$ eşitliğini sağlar.

vii. Sıfırdan farklı her $a \in K$ için K kümesinde a^{-1} adında öyle bir eleman vardır ki $a \cdot a^{-1} = 1$ eşitliğini sağlar.

Tanım 2.23 (Vektör Uzay): X boş olmayan bir küme ve K bir cisim olsun. $+: X\,x\,X \to X$, $\cdot : K\,x\,X \to X$ fonksiyonları $\forall\, x, y, z \in X\ ve\ \forall\, \alpha, \beta \in K$ için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X e K cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

$V_1)$ $x + y = y + x$ ve

$V_2)$ $x + (y + z) = (x + y) + z$

$V_3)$ $x + 0 = 0 + x = x$ olacak biçimde bir $0 \in X$ vardır.

$V_4)$ $x + (-x) = (-x) + x = 0$ olacak biçimde bir $(-x) \in X$ vardır.

$V_5)$ $\alpha.(\beta x) = (\alpha\, \beta).x$,

$V_6)$ $1.x = x$,

$V_7)$ $\alpha\,(x + y) = \alpha\, x + \alpha\, y$,

$V_8)$ $(\alpha + \beta)x = \alpha\, x + \beta\, x$

$\mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayına reel vektör uzayı, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayına kompleks vektör uzayı denir. $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ olduğundan, $\mathbb{R}$ üzerindeki bir vektör uzayı aynı zamanda $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı olarak alınabilir. Burada X in elemanlarına noktalar ya da vektörler denir.

Tanım 2.24 (Alt Vektör Uzay): X bir vektör uzayı ve $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ olsun. A kümesi toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalı ise yani;

$\forall\, x, y \in A$ ve $\forall\, \alpha \in K$ için

1- $x + y \in A$

2- $\alpha.\, x \in A$ oluyorsa A ya, X in bir vektör alt uzayı (lineer alt uzayı) denir.

Bir vektör uzayının, alt kümesinin bir vektör uzay olduğunu göstermek için toplama ve skalerle çarpma işlemlerinin alt küme üzerinde kapalı olduğunu göstermek yeterlidir.

Teorem 2.25: $\mathbb{R}^n$ bir reel vektör uzayıdır.

İspat: $\mathbb{R}^n$ cümlesinin bir elemanı $x_i \in \mathbb{R}\ (1 \leq i \leq n)$ olmak üzere $x = (x_i) = (x_1, x_2, \dots, x_n)\ \ dir.$ O halde $\mathbb{R}^n$ cümlesi üzerinde toplama işlemi $x = (x_i) = (x_1, x_2, \dots, x_n)\ \in \mathbb{R}^n$ ve $y = (y_i) = (y_1, y_2, \dots, y_n)\ \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $+ :\ \mathbb{R}^n \text{ x } \mathbb{R}^n\ \rightarrow\ \mathbb{R}^n$ dir. $(x, y) \rightarrow x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \dots\ , x_n + y_n)$ ve skaler ile çarpım $\cdot :\ \mathbb{R}^n\ x\ \mathbb{R}^n\ \rightarrow\ \mathbb{R}^n\ (\ \alpha, x\ ) \rightarrow \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$ şeklinde tanımlanır.
Şimdi vektör uzay özelliklerini sağladığını gösterelim:

(i) Kapalılık Özelliği

$x = (x_i) = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_i) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dizileri için;
$x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots\ \ , x_n + y_n)$
dizilerin toplamı yine reel terimli dizidir. O halde $\mathbb{R}^n$ cümlesi üzerinde toplama işlemi

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ ,\qquad y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

olmak üzere $+ : \mathbb{R}^n\ \rightarrow \mathbb{R}^n$ dir.

(ii) Değişme Özelliği

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots\ \ , x_n + y_n)$ dir.
Reel sayılarda toplama işleminin değişme özelliği vardır. Dolayısı ile
$x + y = (y + x) = (y_1, y_2, \dots, y_n) + (x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots\ \ , y_n + x_n)$
$x + y = (y_1, y_2, \dots, y_n) + (x_1, x_2, \dots, x_n)$ yazalım.
Buradan $x + y = y + x$ elde edilir.

(iii) Birleşme Özelliği

$(x + y) + z = \big((x_1 + y_1) + z_1\ , (x_2 + y_2\ \big) + z_2, \dots\ \ , (x_n + y_n) + z_n)$
Reel sayılarda toplamın birleşme özelliğinden;
$(x + y) + z = x + (y + z) = (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2\ ), \dots, x_n + (y_n + z_n\ ))$
Buradan $(x + y) + (z) = x + (y + z)$ elde edilir.

(iv) Etkisiz Eleman Özelliği

$\theta = (0,0, \dots ,0)$ dizisini ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dizisini ele alalım.

$\theta + x = (0,0, \dots ,0) + (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0 + x_1, 0 + x_2, \dots , 0 + x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ elde edilir. Öyleyse; $\theta + x = x$ olmak üzere $\theta = (0,0, \dots ,0)$ dizisi etkisiz eleman özelliği gösterir.

(v) Ters Eleman Özelliği

$(-x) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ dizisi verilsin.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dizisi ile $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ dizisinin toplamına bakalım.

$(x_n) + (-x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$

$= (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), \dots , x_n + (-x_n))$

= (0,0, … ,0) elde edilir. Buradan $x + (-x) = \theta$ yazılır. Öyleyse (x) dizisinin ters elemanı $(-x)$ dizisi olur. Bu durum tüm (x) dizileri için geçerlidir.

(vi) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dizisi için;

$$\alpha(\beta x) = \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \dots , \beta x_n) = (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2), \dots , \alpha(\beta x_n))$$

yazılır. Reel sayılarda çarpma işleminin değişme özelliğinden;

$$\alpha(\beta x) = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2, \dots , (\alpha\beta)x_n)$$

yazılır. Buradan;

$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)(x_1, x_2, \dots, x_k) = (\alpha\beta)(x_n)$ bulunur. Öyleyse $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ sağlanır.

(vii) Birim Eleman Özelliği

$1 \in \mathbb{R}$ ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dizisi için;

$1x = 1(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1x_1, 1x_2, \dots, 1x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ yazılır.

Öyleyse; $1x = x$

(viii) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dizileri için

$\alpha(x + y) = \alpha((x_1, x_2, \dots , x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n))$ yazılır. Buradan;

$\alpha(x + y) = \alpha((x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots , x_n + y_n))$

$= (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \dots , \alpha(x_n + y_n))$

Reel sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerinde dağılma özeliğini kullanarak;

$\alpha(x + y) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \dots , \alpha x_n + \alpha y_n)$

$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots , \alpha x_n) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \dots , \alpha y_n)$

$= \alpha(x_1, x_2, \dots , x_n) + \alpha(y_1, y_2, \dots , y_n) = \alpha x + \alpha y$

Öyleyse $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ sağlanır.

(ix) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $x = (x_1, x_2, \dots , x_n)$ dizisi için;

$(\alpha + \beta)x = (\alpha + \beta)(x_1, x_2, \dots , x_n) = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2, \dots , (\alpha + \beta)x_n)$

Reel sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerinde dağılma özelliğinden;

$(\alpha + \beta)x = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2 \dots , \alpha x_n + \beta x_n)$

Buradan;

$(\alpha + \beta)x = \alpha(x_1, x_2, \dots , x_n) + \beta(x_1, x_2, \dots , x_n)$

Öyleyse;

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

Buradan $\mathbb{R}^n$ in reel vektör uzay olduğu gösterilmiş olur.

BÖLÜM 3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DİZİLER

Tanım 3.1 (Asimptotik Yoğunluk): $K \subseteq N$ alt kümesi için

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: \quad k \in K\}|$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine K kümesinin yoğunluğu veya doğal yoğunluğu denir $\delta(K)$ ile gösterilir [18].

Burada $|\{k \leq n: \quad k \in K\}|$ ile K kümesinin n sayısından büyük olmayan elemanlarının sayısı gösterilmektedir.

Örnek 3.2: $\delta(N) = 1$ için $\delta\{n^2 : n \in \mathbb{N}\} = 0$ ve

$\delta\{2n : n \in \mathbb{N}\} = \delta\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{2}$ olduğu yoğunluk tanımından kolayca görülmektedir. Asal sayılar kümesi sıfır yoğunluğuna sahiptir ve bunun gibi doğal sayıların her bir sonlu alt kümesi de sıfır yoğunlukludur.

Tanım 3.3 (İstatistiksel Yakınsak Dizi): (x_k) reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her ε > 0 için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa , (x_k) dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir [9]. Bu durumda $st - \lim x = L$ veya $x_k \to L\ (S)$ biçiminde gösterilir.

Tüm istatistiksel yakınsak diziler uzayı S ile gösterilir. Eğer özel olarak $L = 0$ ise yani (x_k) dizisine istatistiksel sıfır dizisidir denir. Tüm istatistiksel sıfır dizilerinin kümesi S_0 olarak gösterilir.

Örnek 3.4: $m = 1,2,3, \ldots$ için

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini ele alalım. $\forall\ \varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\le n:\ x_k\neq 0\}|\le 0\le \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}=0\,.$$

Bu ise $S-\lim x_k=0$ demektir.

Örneğin $x=(1,0,1,0\ldots,)$ dizisi sınırlıdır. Ancak istatiksel yakınsak değildir. Yakınsak her dizinin sınırlı olduğunu Teorem 2.6'da göstermiştik ancak istatistiksel yakınsak dizilerin sınırlı olması koşulu yoktur. Bunu aşağıda bir örnek ile gösterelim.

Örnek 3.5: $x=(x_k)$ dizisinin genel terimi

$$x_k=\begin{cases}\sqrt{k}; & k=m^2\\ 0; & k\neq m^2\end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Aynı şekilde $S-\lim x_k=0$ olur. Ancak x dizisi üstten sınırsızdır.

Bu örnek ile istatistiksel yakınsak bir dizinin daima sınırlı olmadığı açıkça görülür.

Teorem 3.6: İstatistiksel yakınsak dizinin limiti tekdir.

İspat: (x_k) dizisi istatistiksel yakınsak olsun. (x_k) dizisinin $L_1\neq L_2$ olacak şekilde hem L_1 hem L_2 sayılarına istatistiksel yakınsadığını varsayalım. $\forall\, k\in\mathbb{N}$ için

$\alpha_k=L_1-L_2$ diyelim.

$$\varepsilon=\frac{L_1-L_2}{2}$$

seçelim.

$S-\lim x_k=L_1$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n:|x_k-L_1|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|=0$$

ve $S-\lim x_k=L_2$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n:|x_k-L_2|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|=0$$

şeklinde ifade edilir.

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,|\{k\le n:|x_k|\ge\ \varepsilon\}|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,|\{k\le n:|L_1-L_2|\ge\ \varepsilon\}|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L_1| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L_2| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| = 0 + 0 = 0$$

olup çelişki elde edilir. Böylece $L_1 = L_2$ olduğu sonucuna varılır.

Teorem 3.7: Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır [2].

İspat: (x_k) yakınsak bir dizi ve $\lim_{k\to\infty} x_k = L$ olsun. $\forall\, \varepsilon > 0$ için $k \geq k_0$ olduğunda $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir k_0 sayısı vardır. Öyleyse $k \geq k_0$ olduğunda $|x_k - L| \geq \varepsilon$ olamaz. Buradan

$$|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq k_0$$

yazılır. Eşitsizliğin her iki tarafını $\frac{1}{n}$ ile çarpalım.

$$\frac{1}{n}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{n} k_0$$

dir. $n \to \infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} k_0 \qquad (1)$$

Eşitsizliği elde edilir. Burada $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} k_0 = 0$ dır. Aşikâr olarak

$$0 \leq |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

dir.

Eşitsizliğin her iki tarafını $\frac{1}{n}$ ile çarptığımızda

$$0 \leq \frac{1}{n}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan;

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \qquad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) eşitsizliklerinden

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} k_0$$

olur. Buraya sıkıştırma teoremini uygularsak ;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olur.

$\lim_{k\to\infty} x_k = L$ iken S- $\lim_{k\to\infty} x_k = L$ olduğu açıktır. Bu durum her yakınsak dizi için geçerli diyebiliriz. Öyleyse yakınsak her dizinin istatistiksel yakınsak olduğu açıktır. Fakat bunun tersi doğru değildir. Yani istatistiksel yakınsak olan diziler yakınsak olmak zorunda değildir.

Teorem 3.8 : İstatistiksel yakınsak iki dizinin toplamı istatistiksel yakınsaktır [9].

İspat : $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ istatistiksel yakınsak iki dizi olsun. Buradan;

$$S - \lim_{k\to\infty} x_k = L_1$$

ve

$$S - \lim_{k\to\infty} y_k = L_2$$

yazılır. Amacımız;

$$S - \lim_{k\to\infty} (x_k + y_k) = L_1 + L_2$$

olduğunu göstermektir.

$S - \lim_{k\to\infty} x_k = L_1$ ise $A = \left|\left\{k \leq n : |x_k - L_1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$

için $A \subset \mathbb{N}$ ve $\delta(A) = 0$ olduğundan her ε > 0 için $\forall\, k > k_1$ ve $\forall\, k \in \mathbb{N}\backslash A$ için

$$|x_k - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır.

Aynı şekilde $S - lim\, y_k = L_2$ ise $B = \left|\left\{k \leq n : |y_k - L_2| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$ için $B \subset \mathbb{N}$ ve $\delta(B) = 0$ olduğundan her ε > 0 için $\forall\, k > k_2$ ve $\forall\, k \in \mathbb{N}\backslash B$ için

$$|y_k - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $k_2 \in \mathbb{N}$ vardır.$k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ alalım. $\forall\, k \in \mathbb{N}\backslash\,(A \cap B)$ ve $\forall\, k > k_0$ için

$$|\,(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| < |x_k - L_1| + |y_k - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

yazılır. Buradan $\forall\, \varepsilon > 0$ için $k \in \mathbb{N}\backslash\,(A \cap B) \wedge k > k_0$ olduğunda

$|(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$ … (■)

olacak şekilde en az bir k_0 sayısı vardır.

$$|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|$$
$$\leq \left|\left\{k \leq n : |x_k - L_1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \left|\left\{k \leq n : |x_k - L_1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n}$ ile çarpılarak

$$\frac{1}{n}|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|$$
$$\leq \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : |x_k - L_1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : |y_k - L_2| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

bulunur. $n \to \infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : |x_k - L_1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : |y_k - L_2| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

bulunur. $\delta(A) = 0 \; ve \; \delta(B) = 0$ olduğundan;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}| \leq 0$$

dır. Kardinallik özelliğinden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olduğu açıktır. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ yazarsak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[|\{k \leq n : |(x + y) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon\}|] = 0$$

elde edilir. Buradan $S - lim\,(x + y) = L_1 + L_2$ bulunur.

Teorem 3.9: İstatistiksel yakınsak bir dizi ile bir skaler sayının çarpımından elde edilen dizi de istatistiksel yakınsaktır [9].

İspat: Herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ skaleri alalım. Eğer $\alpha = 0$ ise

$S - lim\,\alpha x_k = S - lim\,0.x_k = S - lim\,0 = 0$ olup, ispat açıktır.

Şimdi $\alpha \neq 0$ olmak üzere $S - lim\,x = L$ olsun. Bu takdirde, $A \subseteq \mathbb{N}$ için $\delta(A) = 0$ olduğunda, $\mathcal{E} > 0$ verildiğinde her $k > k_0$ ve her

$k \in (\mathbb{N} \setminus A)$ için $|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

Buradan da her $k \in (\mathbb{N} \setminus A)$ ve her $k \geq k_0$ için

$$|\alpha x_k - \alpha.L| \quad = |\alpha\,||x_k - L| \leq |\alpha\,|\frac{\varepsilon}{|\alpha\,|} = \varepsilon$$

olup, her $\mathcal{E} > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : |\alpha x_k - \alpha.L| \quad \geq \mathcal{E}\} \right| = 0$$

elde edilir. Yani

$$S - lim\,(\alpha.x_k) = \alpha.L\,.$$

Teorem 3.10: İstatistiksel yakınsak dizilerin kümesi bütün diziler uzayının bir alt vektör uzayıdır.

İspat : İstatistiksel yakınsak dizilerin kümesi s olsun. Tüm dizilerin kümesini ise s ile gösterelim. Tüm dizilerin uzayı s vektör uzaydır. Buradan $S \neq \emptyset$ dir. İstatistiksel yakınsak dizilerin kümesi bütün dizilerin alt kümesidir.

$\forall\, x, y \in S$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$S - \ lim(x \ + \ y) \ = S - lim\, x + S - lim\, y \in S$$
$$S \ - \ lim(\alpha x) \ = \ \alpha[S \ - \ lim\, x] \in S$$

olduğundan istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S, tüm dizilerin kümesi S nin alt vektör uzayıdır. Buradan yakınsak diziler kümesinin de istatistiksel yakınsak diziler uzayının alt vektör uzayı olduğu sonucu çıkar.

Tanım 3.11 (İstatistiksel Cauchy Dizisi): $\forall\, \varepsilon > 0$ ve hemen hemen her k için

$$|x_k - x_N\,| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε sayısına bağlı bir N doğal sayısı varsa yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \,|\, \{k \leq n : \ |\mathrm{x_k} - x_N| \geq \varepsilon\} \,| = 0$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [9].

Teorem 3.12: $x = (x_k)$ dizisi istatiksel yakınsak ise istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat: $S - lim\, x = L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. O halde hemen hemen her k için $|\mathrm{x_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Eğer N sayısı $|\mathrm{x_N} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçilirse hemen hemen her k için;

$$|\mathrm{x_k} - x_N| = |\mathrm{x_k} - L + L - x_N| \leq |\mathrm{x_k} - L| + |x_N - \mathrm{L}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$|\{k \leq n : |\mathrm{x_k} - x_N| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| + |\{k \leq n : |L - x_N| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}|$$

Her iki tarafı $\frac{1}{n}$ ile çarpalım.

$$\frac{1}{n}|\{k \leq n : |\mathrm{x_k} - x_N| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \frac{1}{n}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} + \frac{1}{n}|\{k \leq n : |L - x_N| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}|$$

Her iki tarafın limitini alalım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : |\mathrm{x_k} - x_N| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\left\{k \leq n : |\mathrm{x_k} - \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\left\{k \leq n : |L - x_N| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}|$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\left\{k \leq n : |\mathrm{x_k} - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\left\{k \leq n : |L - x_N| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}| = 0$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : |\mathrm{x_k} - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

bulunur, böylece $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel Cauchy olduğu gösterilmiş olur.

BÖLÜM 4. QUASİ CAUCHY DİZİLERİ

Tanım 4.1: (x_n) reel terimli bir dizi olsun. (x_n) dizisinin ardışık terimlerinin farkını aldığımızda limiti 0 ise yani

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x)=0$$

olduğunda (x_n) dizisine quasi Cauchy dizisi denir [5, 12]. $\Delta x_n=(x_{n+1}-x_n)$ ile ifade edilir. Bu tanımı geliştirecek olursak;

Her $\varepsilon>0$ için $n\geq n_0$ olduğunda $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir n_0 doğal sayısı varsa (x_n) dizisine quasi Cauchy dizisi denir.

Örnek 4.2: $(x_n)=(\frac{3n}{2n+2})$ dizisi quasi Cauchy dizisidir.

(x_n) dizisinin ardışık terimleri farkının limit değerini inceleyeceğiz.

$$\lim_{n\to\infty}\Delta x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3(n+1)}{2(n+1)+2}-\frac{3n}{2n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{4n^2+12n+8}=0$$

olduğu için $(x_n)=(\frac{3n}{2n+2})$ dizisi quasi Cauchy dizisidir.

Teorem 4.3: Yakınsak her dizi quasi Cauchy dizisidir.

İspat: (x_n), l sayısına yakınsayan herhangi bir dizi olsun. Yani $\lim_{n\to\infty}(x_n)=l$ dir.

$\Delta x_n=(x_{n+1}-x_n)$ için;

$$\lim_{n\to\infty}\Delta x_n=\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-l-x_n+l)=\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-l)+(l-x_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-l)+\lim_{n\to\infty}(l-x_n)=0+0=0$$

olur.

Fakat bu teoremin karşıtı doğru değildir. Yani her quasi Cauchy dizisi yakınsak olmak zorunda değildir.

Teorem 4.4: Reel terimli quasi Cauchy dizileri kümesi bir vektör uzaydır.

İspat : Reel terimli quasi Cauchy dizileri kümesinin bir vektör uzay olduğunu göstermek için Tanım 2.23 deki toplama ve skalerle çarpma işlemlerinin quasi Cauchy diziler kümesinde tanımlı olduğunu göstermek yeterli olur.

Reel terimli (x_n) ve (y_n) quasi Cauchy dizisini alalım. (x_n) dizisi quasi Cauchy olduğundan $\lim_{n\to\infty}(\Delta x_n) = 0$ dır. (y_n) dizisi quasi Cauchy olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta y_n) = 0 \ .$$

Bu durumda ;

$$\lim_{n\to\infty}((x_{n+1} - y_{n+1}) - (x_n + y_n)) = \lim_{n\to\infty}((\Delta x_n) + (\Delta y_n))$$
$$= \lim_{n\to\infty}(\Delta x_n) + \lim_{n\to\infty}((\Delta y_n) = 0 + 0 = 0$$

elde edilir. Toplama işlemi üzerinde tanımlı olduğu gösterilmiş oldu. Şimdide skalerle çarpma işlemi üzerinde tanımlı olduğunu gösterelim.

(x_n) quasi Cauchy dizisi ve c sabit bir sayı olmak üzere $(c.x_n)$ dizisi quasi Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Buradan;

$\lim_{n\to\infty}(cx_{n+1} - c\,x_n) = \lim_{n\to\infty} c(\Delta x_n) = c\lim_{n\to\infty}(\Delta x_n) = c.0 = 0$ dır.

Buradan ispat tamamlanmış olur ve reel terimli quasi Cauchy dizileri kümesi bir vektör uzaydır.

Tanım 4.5 (Ward Kompaktlık): Reel sayılar kümesinden bir A alt kümesi alalım. Terimleri A dan alınan her bir (x_n) dizisi bir quasi Cauchy alt diziye sahip ise A kümesine ward kompakt küme denir [12].

Teorem 4.6: Ward kompakt bir kümenin her alt kümeside ward kompaktır.

İspat: Ward kompakt özelliğine sahip bir A kümesi olsun. Bu A kümesinden herhangi bir B alt kümesi alalım. B kümesinin ward kompakt olduğunu göstermek için bir (x_n) dizisi alalım. $B \subseteq A$ olduğu için B dan alınan (x_n) dizisinin tüm terimleri A kümesinde de olur. A ward kompakt olduğu için A den alınan herhangi bir dizinin quasi Cauchy alt dizisi olduğundan dolayı (x_n) dizisinin de quasi Cauhy alt dizisi olacaktır. Yani (x_n) dizisinin bir (x_{n_k}) quasi Cauchy alt dizisi vardır. Öyleyse B ward kompakttır.

Tanım 4.7 (Ward Süreklilik): Reel sayılar kümesinden bir A alt kümesi alalım. A kümesinden reel sayılara tanımlı bir f fonksiyonu eğer quasi Cauchy dizilerini quasi Cauchy dizilerine dönüştürüyorsa bu fonksiyonuna ward sürekli denir.
Yani terimleri A dan olan her (x_n) quasi Cauchy dizisi için $f(x_n)$ dönüşüm diziside quasi Cauchy dizisi oluyorsa bu f fonksiyonuna ward süreklidir denir [12].

Teorem 4.8 : Reel sayıların ward kompakt iki alt kümesinin birleşimi ward kompakttır.

İspat : Reel sayılar kümesinden A ve B ward kompakt iki küme olsun. $A \cup B$ kümesinin ward kompakt olduğunu göstermek için elemanları $A \cup B$ den olan herhangi bir (x_n) dizisi alalım. (x_n) dizisinin terimleri A da veya B de olmak zorundadır. Varsayalım ki terimler B kümesinde olsun. (x_n) dizisinin terimlerini oluşturan bir alt diziye (x_{n_k}) diyelim. B kümesi ward kompakt olduğu için (x_{n_k}) dizisinin bir quasi Cauchy alt dizisi vardır. Bu alt dizisi, (x_n) dizisinin bir alt dizisi olduğundan dolayı $A \cup B$ kümesi ward kompakttır.

Teorem 4.9: $A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere A üzerinde ward sürekli her fonksiyon süreklidir [12].

İspat: A üzerinde ward sürekli bir f fonksiyonu olsun .Bir (x_n) dizisi alalım ve bu dizi x_0 sayısına yakınsasın. (x_n) dizisinden farklı x_0 a yakınsayan bir (z_n) dizisi alalım yani $(z_n) = (x_1, x_0, x_2, x_0, \dots, x_n, x_0, \dots)$ ile ifade edilir. Yakınsak her dizi quasi Cauchy dizisi olduğu için (z_n) dizisi de quasi Cauchy dizisidir. f fonksiyonu ward sürekli olduğundan dolayı $(y_n) = (f(x_1), f(x_0), f(x_2), f(x_0), \dots, f(x_n), f(x_0), \dots)$ dizisi de quasi Cauchy dizisidir. Öyleyse $(f(x_n))$ dizisi de $f(x_0)$ yakınsaktır deriz. Öyleyse f fonksiyonu A üzerinde süreklidir.
Ancak bu teoremin karşıtı doğru değildir. Bunu göstermek için aşağıda bir örnek verelim.

Örnek 4.10: $f(x) = x^2$, $(x_n) = \sqrt{n+2}$

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta x_n) = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta x_n) = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}\,.\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+3-n-2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \Delta f(x_n) = \left(\sqrt{n+3}\right)^2 - \left(\sqrt{n+2}\right)^2 = n+3-n-2 = 1 \neq 0$$

olduğundan quasi Cauchy değildir. Öyleyse f fonksiyonu süreklidir fakat ward sürekli değildir.

Teorem 4.11: İki ward sürekli foksiyonun toplamı da yine ward süreklidir.

İspat: Ward sürekli olan f ve g fonksiyonları verilmiş olsun. Amacımız $f+g$ fonksiyonunun ward sürekli olduğunu göstermektir. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve (x_n) quasi Cauchy dizisi alalım. f fonksiyonu ward sürekli olduğu için tanım gereği $(f(x_n))$ dizisi de quasi Cauchy dizisi olmalıdır. Yani;

$$\lim_{n\to\infty} \Delta f(x_n) = 0$$

olur. $n \geq n_1$ için $|\Delta f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $n_1 \epsilon \mathbb{N}$ vardır. Benzer şekilde g fonksiyonu da ward sürekli olduğu için $g(x_n)$ diziside quasi Cauchy dizisidir. Yani;

$$\lim_{n\to\infty} \Delta g(x_n) = 0$$

olur. $n \geq n_2$ için $|\Delta g(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $n_2 \epsilon \mathbb{N}$ vardır.

$\max\{n_1, n_2\} = M$ diyelim. $n \geq M$ için

$$|\Delta(f+g)(x_n)| = |\Delta f(x_n) + \Delta g(x_n)| \leq |\Delta f(x_n)| + |\Delta g(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Buradan $f+g$ fonksiyonuda ward süreklidir.

Teorem 4.12: $\mathbb{R}$ nin ward kompakt bir alt kümesinin ward sürekli görüntüsü ward kompakttır.

İspat : Reel sayılardan A ward kompakt bir küme alalım. f fonksiyonu ise A üzerinde ward sürekli bir fonksiyon olsun. Bu teoremdeki amacımız $f(A)$ nın görüntü kümesinin ward sürekli olduğunu göstermektir. $f(A)$ üzerinde tanımlı herhangi bir (y_n) dizisi olsun. Her $n \in N$ için $(y_n) = f(x_n)$ olacak biçimde A kümesinin x_n elemanları vardır. A kümesi ward kompakt olduğu için $x = (x_n)$ dizisinin bir quasi Cauchy alt dizisi vardır. Bu alt diziye ise (x_{n_k}) diyelim. f ward sürekli olduğu için $(f(x_{n_k}))$ da quasi Cauchy dizisidir. Buradan $(f(x_{n_k}))$ dizisi $(f(x))$ in bir quasi Cauchy alt dizisi olduğu kolaylıkla görülür.

Böylece ward kompakt bir alt kümenin ward sürekli görüntüsünün de ward kompakt olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 4.13: Düzgün sürekli her fonksiyon ward süreklidir [12].

İspat : $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Düzgün sürekli bir f fonksiyonu alalım. Amacımız f fonksiyonunun A üzerinde ward sürekli olduğunu göstermektir. Bunun için herhangi bir (x_n) quasi Cauchy dizisi alalım. f fonksiyonu düzgün sürekli olduğu için tanım gereği $\varepsilon > 0$ için $|x - y| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x, y \in A$ için $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir $\delta > 0$ sayısı vardır.
(x_n) quasi Cauchy dizisi olduğundan $n > n_1$ olduğunda $|\Delta x_n| < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan $n > n_1$ için $|\Delta f(x_n)| < \varepsilon$ olur. Sonuç olarak $(f(x_n))$ dizisi quasi Cauchy dizisidir. Öyleyse f fonksiyonu ward süreklidir.

Teorem 4.14: Reel sayılar kümesinin bir alt kümesi üzerinde tanımlı ve reel sayılar kümesi içine ward sürekli fonksiyonların düzgün yakınsadığı fonksiyonda ward süreklidir.

İspat: Reel sayılardan bir A alt kümesi alalım. (f_n), A üzerinde tanımlı bir ward sürekli fonksiyon dizisi olsun. $x = (x_n)$ bir quasi Cauchy dizisidir. Varsayalım ki (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsasın. Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in A$ için $n \geq N$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. f_N ward sürekli fonksiyon olduğunda her $n \geq N_1$ için $|\Delta f_N(x_n)| < \frac{\varepsilon}{3}$ koşulunu sağlayan ε sayısına bağlı bir $N_1 \in N$ vardır. Buradan $n \geq N_1$ için

$$|\Delta f(x_n)| \leq |f(x_{n+1}) - f_N(x_{n+1})| + |f_N(x_{n+1}) - f_N(x_n)| + |f_N(x_n) - f(x_n)|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

elde edilir.
Öyleyse f fonksiyonu A üzerinde ward süreklidir denir.

Teorem 4.15: Reel sayılar kümesinin ward kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı, reel sayılar kümesi içine ward sürekli fonksiyon düzgün süreklidir [12].

İspat: Reel sayılar kümesinin bir A ward kompakt alt kümesini ele alalım. f fonksiyonu A da tanımlı ward sürekli bir fonksiyon olsun.

Varsayalım ki f fonksiyonu A' da düzgün sürekli olmasın. Yani, $\forall\, \delta > 0$ ve $x, y \in A$ vardır. Öyleki $|x - y| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ olan en az bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. Öyle bir $(x_n), (y_n) \in A$ dizisi vardır ki $\forall \quad n \in N$ için $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ iken $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ olsun. A kümesi ward kompakt olduğundan $(x_n) \in A$ dizisinin quasi Cauchy bir alt dizisi vardır. Bu diziye ise (x_{n_k}) diyelim. Aynı şekilde (y_{n_k}) dizisi de $(y_n) \in A$ dizisinin quasi Cauchy alt dizisidir.

$$\left|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\right| \leq \left|y_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}}\right| + \left|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - y_{n_k}\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

sağlanır. Diğer taraftan (x_{n_k}) ' nın quasi Cauchy dizisi olduğu kullanılır. Yani

$$\left|x_{n_{k+1}} - y_{n_k}\right| \leq \left|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - y_{n_k}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

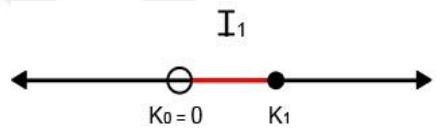
$(x_{n_{k+1}} - y_{n_k})$ dizisi 0 sayısına yakınsar. Böylece her $i \geq 1$ için $z_j = x_{n_i}$ ve $z_{j+1} = y_{n_i}$ olacak şekilde j bulunan $z_j = (x_{n_1}, y_{n_1}, x_{n_2}, y_{n_2}, x_{n_3}, \dots)$ dizisi tanımlayabiliriz. (z_j) dizisi quasi Cauchydir. Buna karşılık $(f(z_j)) = (f(x_{n_1}), f(y_{n_1}), f(x_{n_2}), f(y_{n_2}), \dots)$ dizisi quasi Cauchy değildir. Dolayısı ile çelişki elde edilmiştir yani reel sayılar kümesi içinde ward sürekli tüm fonksiyonlar düzgün süreklidir.

BÖLÜM 5. KUVVETLİ LACUNARY YAKINSAK DİZİLER

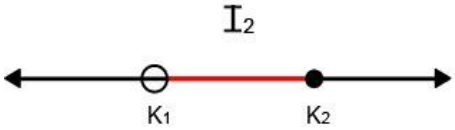
Tanım 5.1 (Lacunary Dizi): $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ olacak şekilde $\theta = (k_r)_{r=0}^{r=\infty}$ artan tam sayı dizisine lacunary dizisi denir [10].

θ tarafından oluşturulan aralıklar I_r ile gösterilir. $k \in \mathbb{R}$ için $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ şeklinde ifade edilir. I_r aralığını inceleyelim:

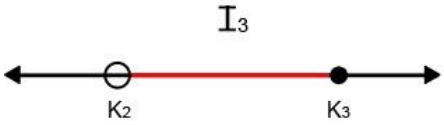
$r = 1 \quad I_1 = (k_0 , k_1]$



$r = 2 \quad I_2 = (k_1 , k_2]$



$r = 3 \quad I_3 = (k_2 , k_3]$



…

I_r aralığının sonsuza kadar gittiği aşikardır ve bu diziyi sonsuza kadar aldığımızda aralıklarının büyüdüğünü görüyoruz. Öyleyse $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ dir.

$$\sum_{i=k_{r-1}+1}^{k_r} |x_i| = \sum_{i \epsilon\, I_r}^{k_r} |x_i|$$

alalım. Bu ifadeler sıklıkla ortaya çıkacak ve uygunluk olması için kısaca

$$\sum_{I_r} |x_i| \text{ yazabiliriz.}$$

Aynı zamanda $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranını ise q_r ile göstereceğiz.

Örnek 5.2: $\theta = (k_r) = 2^r - 1$ lacunary dizisidir.

Her $r \in \mathbb{N}$ için θ dizisi pozitif bir tam sayı dizisi olur.

$r = 0$ seçildiğinde $(k_0) = 2^0 - 1 = 0$.

$$h_r = k_r - k_{r-1} = (2^r - 1) - (2^{r-1} - 1)$$
$$= (2^r - 1 - 2^{r-1} + 1)$$
$$= (2^r - 2^{r-1})$$
$$= 2^r \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2^r . \frac{1}{2}$$

$r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ olur. Öyleyse $\theta = (k_r) = 2^r - 1$ lacunary dizi özelliğini sağlar.

Tanım 5.3 (Kuvvetli Lacunary Yakınsak Dizi): $I_r = (\, k_{r-1}, k_r]$ ve θ bir lacunary dizisi olmak üzere

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |x_k - \mathrm{L}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa (x_k) dizisine L ye kuvvetli lacunary yakınsaktır veya $N_\theta -$ yakınsaktır denir.

Bu durum $N_\theta - \lim x = L$ veya $x_k \overset{N_\theta}{\to} L$ olarak gösterilir.

Teorem 5.4: Bir dizinin kuvvetli lacunary yakınsak limiti varsa tektir.

İspat: Kuvvetli lacunary yakınsak bir (x_k) dizisi olsun. (x_k) dizisi L_1 ve L_2 ye yakınsak olsun.

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|x_k-\mathrm{L}_1|=0 \qquad\qquad \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|x_k-\mathrm{L}_2|=0$$

$L_1-L_2=\alpha$ ve $\alpha>0$ olmak üzere

Üçgen eşitsizliği uygulayalım.

$$|L_1-L_2|=|L_1-L_2-x_k+x_k|\leq|L_1-x_k|+|x_k-L_2|=|x_k-L_1|+|x_k-L_2|$$

$$\sum_{I_r}|x_k-L_1|+|x_k-L_2|=\sum_{I_r}|x_k-L_1|+\sum_{I_r}|x_k-L_2|$$

Denklemi $\frac{1}{h_r}$ ile çarpalım.

$$\frac{1}{h_r}\left(\sum_{I_r}|x_k-L_1|+\sum_{I_r}|x_k-L_2|\right)$$

$$=\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|x_k-L_1|+\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|x_k-L_2|$$

Denklemin her iki tarafının limitini alalım.

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|x_k-L_1|+\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|x_k-L_2|\right)$$

$$=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|x_k-L_1|+\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|x_k-L_2|=0+0$$

Buradan;

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|x_k-L_1|=0\ ve\ \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|x_k-L_2|=0$$

elde edilir.

Öyleyse $L_1-L_2=0$ dır. Buradan çelişki elde etmiş olduk. $L_1=L_2$ ise kuvvetli lacunary yakınsak (x_k) dizisinin limiti tektir.

Teorem 5.5 : Yakınsak her dizi kuvvetli lacunary yakınsaktır.

İspat: (x_k) yakınsak bir dizi ve $\lim_{k\to\infty} x_k = L$ alalım. $\forall\, \varepsilon > 0$ için $k_0 \geq k$ olduğunda $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Ayrıca $r_0 \geq k_0$ olacak şekilde $r_0 \in \mathbb{N}$ seçelim. Öyleki eğer $r \geq r_0$ ise

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k - L| \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} \varepsilon = \frac{1}{h_r}(h_r.\,\varepsilon) = \varepsilon$$

olur. Yani

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k - L| = 0$$

dır. Buradan (x_k) kuvvetli lacunary yakınsaktır.

Teorem 5.6: Kuvvetli lacunary yakınsak diziler kümesi bir vektör uzayıdır.

İspat : Bu ispatta vektör uzay olduğunu göstermek için alt vektör uzayın iki özelliğini göstermek yeterlidir.

$x = (x_k)\ ve\ y = (y_k)$ Kuvvetli lacunary yakınsak iki dizi olsun. $(x_k + y_k)$ dizisinin kuvvetli lacunary yakınsak dizi olduğunu gösterelim.

$x + y = (x_k) + (y_k) = (x_k + y_k)$

(x_k) kuvvetli lacunary yakınsak bir dizi olduğundan, (x_k) dizisinin bir L_1 limiti vardır.

(y_k) kuvvetli lacunary yakınsak bir dizi olduğundan, (y_k) dizisinin bir L_2 limiti vardır.

(x_k) dizisi L_1 sayısına kuvvetli lacunary yakınsak olduğundan tanım gereği ;

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |x_k - L_1| = 0 \quad (1)$$

yazılır. Ve (y_k) dizisi L_2 sayısına kuvvetli lacunary yakınsak olduğundan;

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |y_k - L_2| = 0 \quad (2)$$

dır. (1) ve (2) kullanılarak

$$\sum_{I_r} |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| = \sum_{I_r} |(x_k - L_1) + (y_k - L_2)|$$

$$\leq \sum_{I_r} |x_k - L_1| + \sum_{I_r} |y_k - L_2|$$

Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{h_r}$ ile çarpalım.

$$\frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)|$$

$$\leq \frac{1}{h_r} \left(\sum_{I_r} |x_k - L_1| + \sum_{I_r} |y_k - L_2| \right)$$

$$\leq \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |x_k - L_1| + \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |y_k - L_2|$$

Eşitsizliğin her iki tarafının limitini alalım.

$$0 \leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)|$$

$$\leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |x_k - L_1| + \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |y_k - L_2|$$

$$0 \leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)|$$

$$\leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |x_k - L_1| + \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |y_k - L_2|$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |x_k - L_1| = 0 \qquad ve \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |y_k - L_2| = 0$$

olduğundan

$$0 \leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \leq 0 + 0$$

Eşitsizlikten;

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| = 0$$

olduğu açıktır. Böylece $x+y$ nin L_1+L_2 sayısına kuvvetli lacunary yakınsaklığı gösterilmiş olur.

Sonuç olarak iki kuvvetli lacunary yakınsak dizinin toplamı kuvvetli lacunary yakınsak dizidir.

(i) Şimdi $c \in \mathbb{R}$ için her bir kuvvetli lacunary yakınsak $x=(x_k)$ dizisi için $c.x=(cx_k)$ dizisinin de kuvvetli lacunary yakınsak dizi olduğunu gösterelim.

$x=(x_k)$ kuvvetli lacunary yakınsak dizi olsun.(x_k) kuvvetli lacunary yakınsak olduğundan bir L limiti vardır. Buradan;

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|x_k-L|=0\ .$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|cx_k-cL|=0$$

olduğunu gösterelim.

$$\sum_{I_r}|cx_k-cL|=\sum_{I_r}|c(x_k-L)|=\sum_{I_r}|c||x_k-L|=|c|\sum_{I_r}|x_k-L|$$

Denklemin her iki tarafını $\frac{1}{h_r}$ ile çarpalım.

$$\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|cx_k-cL|=\frac{1}{h_r}|c|\sum_{I_r}|x_k-L|$$

Denklemin her iki tarafının limitini alalım.

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|cx_k-cL|=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}|c|\sum_{I_r}|x_k-L|=|c|\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|x_k-L|$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|x_k-L|=0$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$|c|.0=0\ olur.$$

Öyleyse ;

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{I_r}|cx_k-cL|=0$$

olur. Öyleyse (x_k) kuvvetli lacunary yakınsak dizi olduğundan $c \in \mathbb{R}$ çarpıldığında oluşan dizi kuvvetli lacunary yakınsak dizidir. Buradan alt vektör uzayın iki özelliğini de gösterdiğimizden ispat tamamlanmış olur. Böylece kuvvetli lacunary yakınsak dizilerin kümesinin bütün yakınsak dizilerin vektör uzayının bir alt vektör uzayı olduğunu göstermiş olduk. Vektör alt uzayı, vektör uzay olduğundan kuvvetli lacunary yakınsak dizi içerenlerin kümesi bir vektör uzayı olur.

Tanım 5.7 (Cesaro Toplanabilirlik):
$x = (x_k)$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = L$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına Cesaro toplanabilirdir denir [19].

Tanım 5.8 (Kuvvetli Cesaro yakınsaklık): $x = (x_k)$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir *L* sayısı varsa x dizisi *L* ye kuvvetli Cesaro (toplanabilirdir) yakınsaktır denir [15]. Kuvvetli Cesaro yakınsak diziler $|\sigma_1|$ ile gösterilir.

$$|\sigma_1| = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \mathrm{L}| = 0 \right\}$$

Özel olarak $L = 0$ seçildiğinde $|\sigma_1|^0$ ile gösterilir.

Teorem 5.9: Yakınsak her dizi kuvvetli Cesaro yakınsaktır.

İspat: (x_n) yakınsak bir dizi olsun ve L sayısına yakınsasın. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $n > N_0$ olduğunda $|\mathrm{x_n} - \mathrm{L}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $N_0 \in \mathbb{N}$ bulunur.$N_1 > N_0$ olacak şekilde bir $\mathbb{N}_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Her $n > \mathbb{N}_1$ için

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \mathrm{L}| = \left| \frac{(x_1 - L) + (x_2 - L) + (x_3 - L) + \cdots + (x_n - L)}{n} \right|$$

$$= \left| \frac{(x_1 - L) + (x_2 - L) + (x_3 - L) + \cdots + (x_{N_0} - L) + (x_{N_0+1} - L) + \cdots + (x_n - L)}{n} \right|$$

Bu toplama üçgen eşitsizliği uygulayalım.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \mathrm{L}|$$

$$\leq \left|\frac{(x_1 - L) + (x_2 - L) + (x_3 - L) + \cdots + \left(x_{N_0} - L\right)}{n}\right|$$

$$+ \left|\frac{\left(x_{N_0+1} - L\right) + \left(x_{N_0+2} - L\right) + \cdots + (x_n - L)}{n}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olduğundan dizi L ye kuvvetli Cesaro yakınsaktır denir.

Aşağıdaki içerme teoremlerini ifade edebiliriz. Öncelikle $\lim inf_r\, q_r > 1$ olduğunda Cesaro toplanabilir bir küme aynı zamanda kuvvetli lacunary yakınsaktır.

Lemma 5.10: Eğer $\lim inf_r\, q_r > 1$ ise $|\sigma_1|^{\mathbf{0}} \subseteq {N_\theta}^{\mathbf{0}}$ dir.

İspat: Öncelikle $\lim inf_r\, q_r > 1$ olduğundan dolayı her $r \geq 1$ için $1 + \delta \leq q_r$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

$|\sigma_1|^{\mathbf{0}} \subseteq {N_\theta}^{\mathbf{0}}$ Cesaro toplanabilir kümenin kuvvetli lacunary yakınsak dizi olduğunu göstermek için $|\sigma_1|^{\mathbf{0}}$ den bir x elemanı alalım ve bu elemanın aynı zamanda ${N_\theta}^{\mathbf{0}}$ olduğunu gösterelim. Yani $x \in |\sigma_1|^{\mathbf{0}}$ ise $x \in {N_\theta}^{\mathbf{0}}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i| = 0 \Rightarrow \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{i=1}^{n}|x_i| \stackrel{?}{=} 0$$

$$\tau_r = \frac{1}{h_r}\sum_{i=1}^{k_r}|x_i| - \frac{1}{h_r}\sum_{i=1}^{k_{r-1}}|x_i| \text{ olacak şekilde bir } \tau_r \text{ aralığı seçelim.}$$

$$\tau_r = \frac{1}{h_r}k_r\left(\frac{1}{k_r}\sum_{i=1}^{k_r}|x_i|\right) - \frac{1}{h_r}k_{r-1}\left(\frac{1}{k_{r-1}}\sum_{i=1}^{k_{r-1}}|x_i|\right) \quad (1)$$

$x \in |\sigma_1|^{\mathbf{0}}$ olduğu için aşağıdaki toplamlar sağlanır.

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{k_r}\sum_{i=1}^{k_r}|x_i| = 0 \; ve \; \lim_{r\to\infty}\frac{1}{k_{r-1}}\sum_{i=1}^{k_{r-1}}|x_i| = 0 \quad (2)$$

Tanım 5.1 de yazdığımız $h_r = k_r - k_{r-1}$ sayısını k_r sayısına bölelim ve yeni oranı q_r cinsinden yazalım.

$$\frac{h_r}{k_r} = \frac{k_r - k_{r-1}}{k_r} = 1 - \frac{k_{r-1}}{k_r} \qquad (3)$$

Tanım 5.1 de $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranından bahsetmiştik. (3) de $\frac{k_{r-1}}{k_r}$ yerine $\frac{1}{q_r}$ yazalım.

$$\frac{h_r}{k_r} = 1 - \frac{1}{q_r} = \frac{q_r - 1}{q_r}$$

elde edildiği kolayca görülür.

$q_r \geq 1 + \delta$ olduğundan dolayı

$$\frac{h_r}{k_r} = \frac{q_r - 1}{q_r} \geq \frac{1 + \delta - 1}{1 + \delta} = \frac{\delta}{1 + \delta}$$

Böylece $\frac{k_r}{h_r} \leq \frac{1+\delta}{\delta}$ olur ve dolayısıyla $\frac{k_{r-1}}{k_r} \leq \frac{1}{\delta}$ elde edilir.

Buradan 1 de verilen τ_r nin $r \to \infty$ iken 0 a yakınsadığı görülür. Böylece $|\sigma_1|^{\mathbf{0}}$ dan alınan x elemanının $N_\theta{}^{\mathbf{0}}$ dizisinin de bir elemanı olduğu gösterilmiş olur. Yani $x \in N_\theta{}^{\mathbf{0}}$ dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Ayrıca bir diğer içerme teoremi olarak eğer lim $sup_r\, q_r$ sınırlı ise her kuvvetli Lacunary yakınsak dizi aynı zamanda kuvvetli Cesaro toplanabilirdir.

Lemma 5.11: Eğer lim $sup_r\, q_r < \infty$ ise $N_\theta{}^{\mathbf{0}} \subseteq |\sigma_1|^{\mathbf{0}}$ dir.

İspat: Her $r \geq 1$ için $q_r \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır.

$N_\theta{}^{\mathbf{0}} \subseteq |\sigma_1|^{\mathbf{0}}$ olduğunu göstermek için $N_\theta{}^{\mathbf{0}}$ den bir x elemanı alalım ve bu elemanın $|\sigma_1|^{\mathbf{0}}$ da da olduğunu gösterelim. Yani $x \in N_\theta{}^{\mathbf{0}}$ ise $x \in |\sigma_1|^{\mathbf{0}}$ olmalıdır.

$\varepsilon > 0$ olsun.$i = 1,2,3 \ldots$ için $sup_{i \geq R}\, \tau_i < \varepsilon$ ve $\tau_i < K$ olacak şekilde $K > 0\ ve\ R > 0$ sayıları vardır. $k_{r-1} < t \leq k_r$ ve $r > R$ için

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}|x_i| \leq \frac{1}{k_{r-1}}\sum_{i=1}^{k_r}|x_i| = \frac{1}{k_{r-1}}\left(\sum_{i\,\in\, I_1}|x_i| + \sum_{i\,\in\, I_2}|x_i| + \cdots + \sum_{i\,\in\, I_r}|x_i|\right)$$

Biliyoruz ki $\tau_r = \frac{1}{h_r}\sum_{i\epsilon I_r}|x_i| = \ ve\ h_r = k_r - k_{r-1}$.

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}|x_i| \le \frac{1}{k_{r-1}}(h_1\tau_1 + \ h_2\tau_2 + \cdots + \ h_R\tau_R + \cdots + h_r\tau_r)$$

$$= \frac{1}{k_{r-1}}((k_1 - k_0)\tau_1 + (k_2 - k_1)\tau_2 + \cdots + (k_R - k_{R-1})\tau_R + \ (k_{R+1} - k_R)\tau_{R+1} + \cdots + (k_r - k_{r-1})\tau_r)$$

$$= \frac{1}{k_{r-1}}\frac{h_1}{h_1}k_1\tau_1 + \frac{h_2}{h_2}\frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}}\tau_2 + \cdots + \frac{h_R}{h_R}\frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}}\tau_R + \frac{h_{R+1}}{h_{R+1}}\frac{k_{R+1} - k_R}{k_{r-1}}\tau_{R+1} + \cdots + \frac{h_r}{h_r}\frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}}\tau_r$$

$$= \frac{h_1}{k_{r-1}}\tau_1 + \frac{h_2}{k_{r-1}}\tau_2 + \cdots + \frac{h_R}{k_{r-1}}\tau_R + \frac{h_{R+1}}{k_{r-1}}\tau_{R+1} + \cdots + \frac{h_r}{k_{r-1}}\tau_r$$

$$\le \frac{1}{k_{r-1}}\left(\sup_{i\ge1}\tau_i\right)(k_1 - k_0 + k_2 - k_1 + \cdots + k_R - k_{R-1}) + \frac{1}{k_{r-1}}\left(\sup_{i\ge1}\tau_i\right)(h_{R+1} + \cdots + h_r)$$

Burada $k_1 - k_0 + k_2 - k_1 + \cdots + k_R - k_{R-1} = k_R$ ve

$h_{R+1} + \cdots + h_r = k_{R+1} - k_R + k_{R+2} - k_R + 1 + \cdots + k_r - k_{r-1} = k_r - k_R$ yazılır.

Bu eşitlik kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}|x_i| \le \frac{1}{k_{r-1}}\left(\sup_{i\ge1}\tau_i\right)(k_r) + \frac{1}{k_{r-1}}\left(\sup_{i\ge1}\tau_i\right)(k_r - k_{r-1})$$

$$< K\frac{k_R}{k_{r-1}} + \varepsilon q_r = K\frac{k_R}{k_{r-1}} + \varepsilon M\ .$$

Sonuç olarak

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}|x_i| \to 0$$

elde edilir. Öyleyse $x\ \epsilon\ |\sigma_1|^{\mathbf{0}}$ dir.

Yukarıda yazdığımız lemmaların sonucu olarak aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Sonuç : $1 < \lim\ inf_r q_r \leq \lim\ sup_r q_r < \infty$ ise $N_\theta = |\sigma_1|$ dir.

Fridy ve Orhan, lacunary dizi tanımını kullanarak lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını da aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır:

Tanım 5.12 (Lacunary istatistiksel yakınsaklık): $x = (x_k)$ dizisi verilmiş olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \ |\{\mathrm{k} \in I_r : |x_k - \mathrm{L}| \geq \varepsilon\}|$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\theta - limx_k = L$ veya $x_k \to L\ (S_\theta)$ şeklinde gösterilir [10].

Aynı çalışmada bazı içerme teoremleri de verilmiştir:

Teorem 5.13: $Q = (k_r)$ lacunary dizisi olmak üzere

i. $(x_k) \to L\ (N_Q)$ ise $(x_k) \to L\ (S_Q)$ dir.

ii. $x \in l_\infty$ ve $(x_k) \to L\ (S_Q)$ ise $(x_k) \to L\ (N_Q)$ dir.

Burada l_∞ ile sınırlı dizilerin kümesi verilmektedir.

BÖLÜM 5.1 KUVVETLİ LACUNARY QUASI-CAUCHY DİZİLERİ

Bu kısımda kuvvetli lacunary quasi-Cauchy dizileri (N_θ-quasi-Cauchy dizileri) tanıtılıp ilgili teoremler verilecektir.

Tanım 5.1.1 (N_θ-quasi-Cauchy dizisi): (Δx_k) dizisi sıfıra N_θ yakınsak ise (x_k) dizisine kuvvetli lacunary quasi Cauchy'dir denir veya (x_k) , N_θ-quasi-Cauchy dizisidir denir.

Teorem 5.1.2: $A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere f, A üzerinde düzgün sürekli bir fonksiyon olmak üzere eğer terimleri A da olan (x_k) bir quasi Cauchy dizisi ise, $(f(x_k))$ da bir N_θ-quasi-Cauchy dizisidir.

İspat: A , $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesi ve f, A üzerinde düzgün sürekli bir fonksiyon olsun. A üzerinden herhangi bir quasi Cauchy dizisi alalım ve bu diziye (x_k) diyelim. $\varepsilon > 0$ ve $x, y \in A$ için f fonksiyonu düzgün sürekli ise $|x - y| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. (x_k) quasi Cauchy dizisi olduğundan $k > k_0$ için $|x_{k+1} - x_k| < \delta$ olacak şekilde bir k pozitif tam sayısı vardır. Buradan ; $r \geq k_0$ için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \frac{1}{h_r} (k_r - k_{r-1}).\varepsilon = \varepsilon .$$

Buradan $(f(x_k))$ bir N_θ quasi Cauchy dizisidir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar. Öyleyse f düzgün sürekli fonksiyonu için A üzerindeki (x_k) quasi Cauchy dizisi ise $f(x_k)$ da N_θ quasi Cauchy dizisidir.

Lemma 5.1.3: (ξ_n , η_n) , $\lim_{n\to\infty} |\xi_n - \eta_n| = 0$ koşulunu sağlayan bir sıralı ikili dizisi ve (x_n) N_θ quasi Cauchy dizisi vardır. Öyleki her pozitif i tam sayı için $(\xi_i , \eta_i) = (x_{j-1}, x_j)$ özelliği gerçekleyen en azından bir pozitif j tam sayısı vardır [13].

İspat: Her k pozitif tam sayısı için $1 < i < n_k$ olduğunda $z_0^k = \eta_k$, $z_{n_k}^k = \xi_{k+1}$ şartını gerçekleyen A kümesinden bir $z_0^k, z_1^k, \dots, z_{n_k}^k$ dizisini alalım. $\left|z_i^k - z_{i-1}^k\right| < \frac{1}{k}$ olarak tanımlayalım. Bu kabul ile aşağıdaki (x_n) dizisini oluşturalım.

$$(\xi_1, \eta_1, z_1^1, \dots, z_{n_1-1}^1, \xi_2, \eta_2, z_1^2, \dots, z_{n_2-1}^2, \dots, \xi_k, \eta_k, z_1^k, \dots, z_{n_{k-1}}^k, \xi_{k+1}, \eta_{k+1}, \dots)$$

Böyle oluşturarak $(\xi_i, \eta_i) = (x_{j-1}, x_j)$ şeklinde her i pozitif tamsayısına karşılık gelen en azından bir pozitif j tamsayısı bulunur. Oluşturulan bu dizi quasi Cauchy dizisidir ve herhangi bir quasi Cauchy dizisi bir N_θ quasi Cauchy dizisi olduğu için bu dizi de N_θ quasi Cauchy dizisi olur.

Tanım 5.1.4 (N_θ − süreklilik): (x_k) dizisi, $\mathbb{R}$ nin bir A alt kümesinde N_θ yakınsak bir dizi iken $(f(x_k))$ da N_θ yakınsak oluyor ise f fonksiyonuna kuvvetli lacunary süreklidir denir. $\mathbb{R}$ nin bir A alt kümesinde tanımlı bir fonksiyonun kuvvetli lacunary sürekli olması için gerek ve yeter koşul bu fonksiyonun bilinen anlamda sürekli olmasıdır.

Tanım 5.1.5 (N_θ − ward süreklilik): (x_k) dizisi, $\mathbb{R}$ nin bir A alt kümesinde N_θ quasi Cauchy dizisi iken $(f(x_k))$ dizisi de N_θ quasi Cauchy oluyorsa f fonksiyonuna kuvvetli lacunary ward süreklidir ya da N_θ − ward süreklidir denir.

Teorem 5.1.6: $A \subset \mathbb{R}$ kümesinden alınan bir f fonksiyonu N_θ ward sürekli ise düzgün süreklidir.

İspat: f fonksiyonunun A üzerinde düzgün sürekli olmadığını varsayalım. Öyleyse herhangi bir $\delta > 0$ için $x, y \in A$ vardır ki $|x - y| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$ olacak şekilde en az bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır.

Her $n \geq 1$ sayısı için $\xi_n, \eta_n \in A$ ve $|\xi_n - \eta_n| < \frac{1}{n}$ olduğunda $|f(\xi_n) - f(\eta_n)| \geq \varepsilon_0$ dır. Lemma 5.12 ye göre herhangi bir $i \geq 1$ sayısı için $\xi_i = x_j$, $\eta_i = x_{j+1}$ şartlarını sağlayan en az bir j pozitif tam sayısının seçilebildiğini ve böylece dizinin N_θ quasi Cauchy dizisi olduğunu biliyoruz. Fakat $\left|f(x_{j+1}) - f(x_j)\right| \geq \varepsilon_0$ olduğundan dolayı $(f(x_i))$ N_θ quasi Cauchy dizisi değildir.

Yani f fonksiyonu N_θ quasi Cauchy dizisini herhangi bir N_θ quasi Cauchy dizisine götürmez. Bu ise düzgün süreklilik tanımına aykırıdır ve $\left(f(x_i)\right)$, N_θ quasi Cauchy dizisi değildir.

Teorem 5.1.7: $A \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı (f_n) dizisi N_θ ward sürekli ve (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise f fonksiyonuna A kümesi üzerinde N_θ ward süreklidir denir.

İspat: Terimleri A de olan bir (x_k) $N_\theta -$ quasi-Cauchy dizisi alalım. (f_n) fonksiyon dizisi düzgün yakınsak olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_1$ ve her $x \in E$ için

$|f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde bir $n_1 \in N$ vardır. Buradan $r \geq n_1$ ve her $x \in A$ için;

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{h_r} (k_r - k_{r-1}).\frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}$$

dır. (f_{n_1}), A üzerinde N_θ ward sürekli olduğundan $r \geq n_2$ için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |f_{n_1}(x_{k+1}) - f_{n_1}(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde $n_2 \in N$ vardır. Şimdi $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ yazalım.

Buna göre $r \geq n_0$ için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

$$\leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |f(x_{k+1}) - f_{n_1}(x_{k+1})| + \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |f_{n_1}(x_{k+1}) - f_{n_1}(x_k)|$$

$$+ \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |f_{n_1}(x_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Buradan;

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = 0 .$$

Böylece f fonksiyonun N_θ quasi Cauchy dizisi olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 5.1.8: $A \subseteq \mathbb{R}$ nin tüm N_θ ward sürekli fonksiyonların kümesi A nin sürekli fonksiyonlar kümesinin kapalı bir alt kümesidir.

İspat: N_θ ward sürekli fonksiyon kümesinin kapanışından f fonksiyon alalım. O halde N_θ ward sürekli fonksiyonlar kümesinden bir f_n dizisi vardır. Öyle ki $\lim_{k \to \infty} f_k = f$ olsun.

f fonksiyonunun N_θ ward sürekli olduğunu göstermek için A kümesinden herhangi bir N_θ quasi Cauchy dizisi alalım ve bu diziye (x_k) diyelim.

$\varepsilon > 0$ olsun. (f_n) dizisi f ye yakınsadığı için öyle bir $n_1 \in N$ vardır ki tüm $k \in N$ için $\left|f(x_k) - f_{n_1}(x_k)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ olur. Buradan; $r \geq n_1$ için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left|f(x_k) - f_{n_1}(x_k)\right| < \frac{1}{h_r} (k_r - k_{r-1}).\frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

f_{n_1} , N_θ ward sürekli olduğundan öyle bir $n_2 \in N$ pozitif sayısı vardır ki $r \geq n_2$ için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| f_{n_1}(x_{k+1}) - f_{n_1}(x_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Şimdi $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ yazalım. Buna göre $r \geq n_0$ için;

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} | f(x_{k+1}) - f(x_k) | \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| f(x_{k+1}) - f_{n_1}(x_{k+1}) \right|$$

$$+\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| f_{n_1}(x_{k+1}) - f_{n_1}(x_k) \right| + \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| f_{n_1}(x_k) - f(x_k) \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Buradan;

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} | f(x_{k+1}) - f(x_k) | = 0 .$$

Böylece $f(x_k)$ N_θ quasi Cauchy dizisidir. Dolayısı ile f fonksiyonu N_θ ward sürekli fonksiyondur ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.1.9: $A \subset \mathbb{R}$ sınırlı ise gerek ve yeter koşul A kümesi N_θ ward kompakttır.

İspat: A, $\mathbb{R}$ nin herhangi bir sınırlı alt kümesi ve (x_n) A kümesinden alınan herhangi bir dizi olsun. Ayrıca (x_n) dizisi $\bar{A}$ nın elemanı olsun. $\bar{A}$ dizisel kompakt bir küme olduğundan (x_n) dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu diziye (x_{n_k}) diyelim. Bu alt dizi N_θ yakınsaktır. Öyleyse (x_{n_k}) N_θ quasi Cauchy dizisidir. Dolayısı ile sınırlı bir küme

N_θ ward kompakt olduğu gösterilmiştir. Şimdi de A kümesi N_θ ward kompakt olsun fakat varsayalım ki sınırlı olmasın. A kümesinden alınan bir x_n kabul edelim ki her n pozitif tamsayısı için $x_{n+1} > 1 + x_n$ eşitsizliğini sağlasın.

O halde (x_n) dizisinin herhangi bir N_θ quasi Cauchy alt dizisi yoktur. Dolayısı ile A kümesi N_θ ward kompakt değildir. Buradan çelişki elde edilmiş olur ve A kümesi N_θ ward kompakt iken sınırlı olması gerektiği sonucuna ulaşılır.

Teorem 5.1.10 : A$\subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı N_θ ward sürekli bir f fonksiyonu A üzerinde N_θ süreklidir.

İspat: f fonksiyonunun $\mathbb{R}$ nin bir A alt kümesi üzerinde tanımlı N_θ ward sürekli olduğunu varsayalım. (x_n) , N_θ yakınsak bir dizi olsun ve $N_\theta - \lim_{n\to\infty} x_k = x_0$ dır.

Öyleyse

$$(x_1, x_0, x_2, x_0, \dots, x_{n-1}, x_0, x_n, x_0, \dots)$$

dizisi (x_0) a N_θ yakınsaktır. Dolayısıyla N_θ quasi Cauchy dizisidir. f fonksiyonu N_θ ward sürekli olduğundan

$$(f(x_1), f(x_0), f(x_2), f(x_0), \dots, f(x_{n-1}), f(x_0), f(x_n), f(x_0), \dots)$$

dizisi N_θ quasi Cauchydir. Buradan $f(x_n)$ dizisinin $f(x_0)$ a N_θ yakınsadığı sonucu çıkar. Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Örneğin $f(x) = x^2$ fonksiyonunu ele alalım. $\sqrt{n}$ dizisi N_θ quasi Cauchy dizisi iken $f(\sqrt{n}) = n$ olup N_θ quasi Cauchy değildir.

Sonuç olarak f fonksiyonu R nin bir A alt kümesi üzerinde N_θ ward sürekli ise süreklidir. f fonksiyonu R nin bir A alt kümesi üzerinde N_θ ward sürekli ise A üzerinde istatistiksel süreklidir.

R nin herhangi bir kompakt alt kümesi üzerindeki tüm sürekli fonksiyonlar düzgün süreklidir. Aynı şart N_θ ward sürekli fonksiyonlar içinde geçerlidir.

Teorem 5.1.11. A, $\mathbb{R}$ nin bir N_θ ward kompakt bir alt kümesi ve $f: A \to \mathbb{R}$, A üzerinde N_θ ward sürekli fonksiyon olduğunda f A üzerinde düzgün süreklidir.

İspat: f fonksiyonunun A üzerinde düzgün sürekli olmadığını varsayalım ve buradan herhangi bir $\delta > 0$ için $x, y \in A$ olup $|x - y| < \delta$ ve $|f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$ olacak şekilde

δ sayısına bağlı en az bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır. Her n pozitif tam sayısı için x_n , β_n vardır öyleki, $|x_n - \beta_n| < \frac{1}{n}$ ve $|f(x_n) - f(\beta_n)| > \varepsilon_0$ dır.

A kümesi N_θ ward kompakt olduğundan (x_n) dizisinin bir N_θ quasi Cauchy alt dizisi (x_{n_k}) vardır. Aynı zamanda (β_n) dizisinin alt dizisi olan (β_{n_k}) dizisi de N_θ quasi Cauchydir. Çünkü $(\beta_{n_{k+1}} - \beta_{n_k})$ üç N_θ dizinin toplamı 0 olduğundan , yani

$$\beta_{n_{k+1}} - \beta_{n_k} = \left(\beta_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}}\right) + \left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right) + \left(x_{n_k} - \beta_{n_k}\right).$$

Öte yandan; $x_{n_{k+1}} - \beta_{n_k} = x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + x_{n_k} - \beta_{n_k}$ eşitliğinden şu sonuç çıkar. $(x_{n_{k+1}} - \beta_{n_k})$ dizisi 0 sayısına N_θ yakınsaktır.

Dolayısı ile

$$(x_{n_1}, \beta_{n_1}, x_{n_2}, \beta_{n_2}, x_{n_3}, \beta_{n_3}, \dots, x_{n_k}, \beta_{n_k}, \dots)$$

dizisi N_θ quasi Cauchydir. Ancak görüntüsü olan

$$(f(x_{n_1}), f(\beta_{n_1}), f(x_{n_2}), f(\beta_{n_2}), f(x_{n_3}), f(\beta_{n_3}), \dots, f(x_{n_k}), f(\beta_{n_k}), \dots)$$

dizisi N_θ quasi Cauchy değildir. Böylece f N_θ quasi Cauchy özelliğini korumaz.

Sonuç olarak bir f fonksiyonu R nin sınırlı bir A alt kümesi üzerinde N_θ ward sürekli ise A kümesi üzerinde de düzgün süreklidir.

Teorem 5.1.12: $\mathbb{R}$ nin herhangi bir N_θ ward kompakt bir alt kümesinin N_θ ward sürekli görüntüsü N_θ ward kompakttır.

İspat: f $\mathbb{R}$ nin bir A alt kümesinde N_θ ward sürekli fonksiyon olsun. E, A kümesinin N_θ ward kompakt bir alt kümesi olduğunu varsayalım. (y_n), $f(E)$ den alınan herhangi bir dizi olsun. Her n pozitif tam sayısı için $x_n \in E$ olmak üzere $y_n = f(x_n)$ yazalım. E N_θ ward kompakt olduğundan dolayı (x_n) dizisinin $(\gamma_k) = (x_{n_k})$ alt dizisi vardır. Öyle ki $N_\theta - \lim_{k\to\infty} \Delta\gamma_k = 0$ dır. $(t_k) = f(\gamma_k)$ olsun. f N_θ ward sürekli olduğundan $f(\gamma_k)$ N_θ quasi Cauchy dir. Böylece $f(x_n)$ dizisinin bir (t_k) alt dizisi vardır ve $N_\theta - \lim_{k\to\infty} \Delta t_k = 0$ dır. Buradan $f(E)$ N_θ ward kompakttır.

Sonuç olarak R'nin herhangi bir kompakt alt kümesinin N_θ ward sürekli görüntüsü N_θ ward kompakttır. $\mathbb{R}$ 'nin herhangi bir sınırlı alt kümesinin N_θ ward sürekli görüntüsü de sınırlıdır.

BÖLÜM 6. SONUÇ

Bu çalışmada kuvvetli lacunary yakınsaklık kavramı üzerine çalışmalar yapılmış olup, şuana kadar yapılan araştırmalar incelenmiştir. Kuvvetli lacunary yakınsak diziler ve quasi Cauchy dizilerinin birleşiminden oluşan kuvvetli lacunary quasi-Cauchy dizileri üzerine teorem ve sonuçlar verilmiştir. Ayrıca kuvvetli lacunary ward süreklilik ve kuvvetli lacunary ward kompakt kavramları tanıtılıp bunlarla bağıntılı olan içerme teoremleri gösterilip sonuçları incelenmiştir.

KAYNAKÇA

[1] A. Zygmund, “Trigonometric Series” (with a foreword by Robert A. Fefferman), *Cambridge Mathematical Library*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[2] H. Fast, “Sur la convergence statisque”, *Colloq Math*. 2, 241-244, 1951.

[3] I.J. Schoenberg, “The integrability of certain functions and related summability methods”, *A mer. Math. Monthly*, 66, pp. 361-375, 1959.

[4] R.C. Buck, “Generalized asymptotic density”, *Amer J. Math* 75, 335-346, 1953.

[5] D. Burton and J. Coleman, "Quasi Cauchy sequences", *The American Mathematical Monthly*, vol.117, pp.328-333, 2010.

[6] H. Cakalli "δ-Quasi Cauchy sequences", *Math. Comput. Modelling*, Vol.53, no.1-2, pp. 397-401, 2011.

[7] H. Çakalli “N_Q −ward continuity” *Abstract and Applied Analysis*, Vol.2012, Article ID 680456, 8 pages 2012.

[8] T. Salat, “On statistically convergent sequences of real numbers”, *Math. Slovaca*, 30, pp.139-150, 1980.

[9] J. A Fridy, “On statistical convergence”, *Analysis*, pp.301-303, 1985.

[10] J. A Fridy, and C. Orhan, “Lacunary statistical convergence”, *Pacific Journal of Math*., Vol.160 no.1, pp. 43-51, 1993.

[11] J. A Fridy, and C. Orhan, ‘‘Lacunary statistical summability,’’ *Journal of Math. Analysis and Applications*, vol.173, no.2, pp.497-504, 1993.

[12] H. Çakalli ‘‘Forward continuity,’’ *Journal of Computational Analysis and Applications*, Vol.13, no.2, pp.225-230, 2011.

[13] D. Burton and J. Coleman, ‘‘Quasi-Cauchy sequences,’’ *American Mathematical Monthly*, Vol.117, no.4, pp.328-333, 2010.

[14] H. Çakallı, and H. Kaplan, “ A study on N_Q − quasi-Cauchy sequences’’ , *Abstr. Appl. Anal.* ArticleID836970,4 pages

[15] A. Freedman, J. Sember and M. Raphael, “Some Cesaro-type summability spaces”, *Proc. London Math*. Soc., 37, 508-520, 1978.

[16] J. S. Connor, “The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences”, *Analysis*, 8, 46-63, 1998.

[17] M. Balcı, “*Analiz-I*”, Balcı Yayınları, Ankara.

[18] I. Zuckerman and H. L. Montgomery, “An introduction to the theory of numbers”, *John Wiley Sons, Inc., Fifth edition,* New York.

[19] F. Basar, “Summability Theory and its applications”, *Bentham Science Publishers, e-books*, Monographs, Istanbul.